Wie wählt man eine Fußballmannschaft?

Wenn aus einer großen Anzahl von Spielern zwei Mannschaften zusammenzustellen sind, ist es nicht immer eine gute Idee, die besten Spieler zuerst auszuwählen.

Von Dominik Zeillinger

Arnolds Blick schweift prüfend über die vor ihm stehenden Klassenkameraden. Er besitzt nun die Macht, über Glück oder Unglück zu entscheiden. Unsere Blicke kreuzen sich, und da trifft er seine erste Wahl:

»Matthias«, doch das bin nicht ich.

Jetzt ist Bernhard an der Reihe. Demonstrativ tänzle ich ein wenig vor und zurück. Auch er wählt aus:

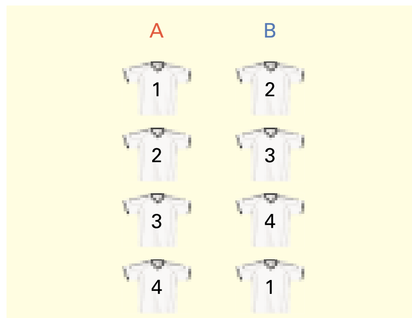
»Sebastian«, auch das bin nicht ich.

Wieder Arnold: »Karl«, immer noch nicht ich und, um es kurz zu machen: Auch bei den nächsten Aufrufen fällt mein Name nicht.

So war es jedes Mal, wenn in der Turnstunde Fußball gespielt wurde. Zwei Schüler durften ihre Mannschaften zusammenstellen, indem sie abwechselnd von den noch »freien« Spielern einen auswählten. Es war mir damals unbegreiflich, warum ein begnadeter Ballkünstler wie ich immer als einer der letzten an die Reihe kam. Erst heute, nach einigen Semestern Mathematikstudium und der Lektüre einer Arbeit des Politologen Steven Brams, ist mir der wahre Grund bekannt.

Machen wir uns die Situation an einem einfachen Beispiel klar: Arnold (A) und Bernhard (B) haben jeweils eine Mannschaft zusammenzustellen. Zur Verfügung stehen die vier Spieler mit den Trikotnummern 1, 2, 3 und 4.

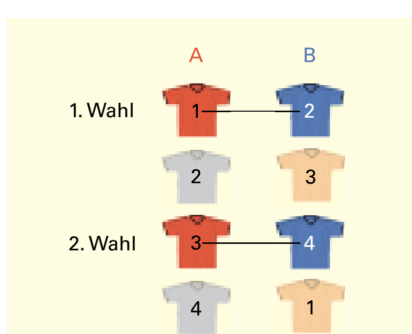
Arnold hat sehr klare Vorstellungen davon, wen er am liebsten in seiner Mannschaft haben will, nämlich die Nummer 1. Dann kommt Spieler 2, dann 3, und erst zum Schluss, wenn ihm gar nichts anderes übrig bleibt, würde Arnold den Spieler 4 wählen (das bin dann wohl ich). Arnolds Präferenzen lassen sich also in einer Wunschliste zusammenstellen; für Bernhard gilt das Gleiche. Im folgenden Bild sind beide Wunschlisten dargestellt, wobei die begehrtesten Spieler in jeder Liste ganz oben stehen.



Dass beide Listen so unterschiedlich sind, ist nicht verwunderlich, wenn man weiß, dass der Spieler 1 ein sehr guter Tormann ist. Arnold selbst ist ein guter Stürmer und braucht damit noch unbedingt einen guten Tormann in seiner Mannschaft. Hingegen ist Bernhard selbst schon Tormann und hat daher kein Interesse an Spieler 1. Ähnlich verhält es sich mit anderen Spielern. Die Stärken und Schwächen jedes Spielers sind in der Klasse bekannt; deswegen kann man auch davon ausgehen, dass Arnold Bernhards Präferenzen kennt und umgekehrt.

Die offensichtliche Wahl: die Besten zuerst

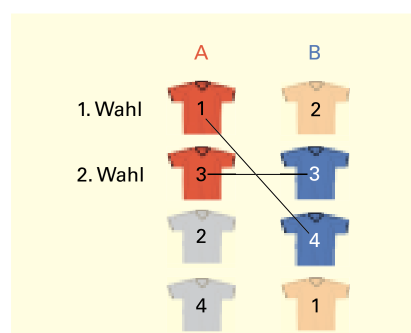
Arnold ist als Erster an der Reihe und wählt Spieler 1, der zuoberst auf seiner Wunschliste steht. Dann greift sich Bernhard seinen Favoriten, Spieler 2. Den hätte Arnold auch gerne gehabt, aber als er wieder an der Reihe ist, steht Spieler 2 nicht mehr zur Verfügung. Darum wählt er Spieler 3, und für Bernhard bleibt Spieler 4 übrig.



Das ist die »offensichtliche Strategie«: Wähle in jeder Runde unter den noch verfügbaren Spielern denjenigen aus, der in deiner Wunschliste an höchster Stelle steht. So machen es die meisten Nachwuchsfußballer. Aber auch im amerikanischen Profi-Baseball ist dieses Verfahren in den offiziellen Regeln vorgeschrieben, um junge Talente, die gerade erst ihre Schulausbildung beendet haben, auf die großen Profi-Clubs aufzuteilen. Da derjenige (in unserem Falle Arnold), der die erste Wahl hat, einen leichten Vorteil hat, darf jener Club mit der Wahl beginnen, der in der vorherigen Saison am schlechtesten abgeschnitten hat. So soll eine ausgeglichene Verteilung der Talente erreicht werden.

Geschickter: die schlaue Wahl

Aber o weh: Die offensichtliche Strategie ist nicht optimal! Wenn Arnold die Wunschliste von Bernhard kennt (und umgekehrt), kann er sich noch verbessern. Da er weiß, dass Bernhard den Tormann mit der Nummer 1 nicht will, kann er in der ersten Runde Spieler 2 wählen, ohne dass ihm Spieler 1 entgeht. Bernhard hat keine Möglichkeit, sich gegen diesen Schachzug von Arnold zu wehren. Er könnte zwar aus Trotz Spieler 1 wählen, würde sich aber damit ins eigene Fleisch schneiden. Er kann nichts Besseres tun, als in der ersten Runde Spieler 3 zu nehmen. In der zweiten Runde holt sich Arnold seinen Einser-Torwart, und Bernhard muss sich wieder mit Nummer 4 begnügen:



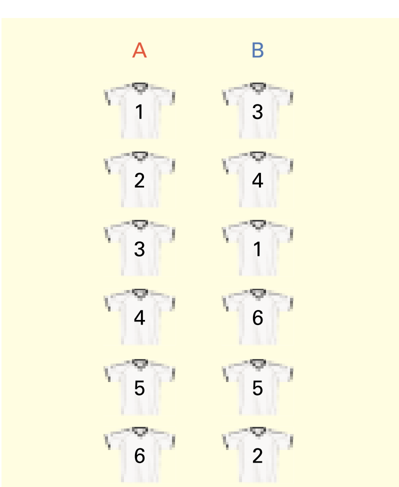
Arnold hat nun durch eine schlaue Strategie eine bessere Mannschaft als zuvor. Bernhard geht es entsprechend schlechter, aber er hätte nichts besser machen können. Hätte er irgendwie anders gewählt, wäre die Sache noch ungünstiger für ihn ausgegangen. Somit ist der dargestellte Ausgang des Auswahlverfahrens das, was die Spieltheoretiker ein Gleichgewicht nennen. Es ist nicht unbedingt die beste aller Möglichkeiten – vor allem nicht für Bernhard –, aber keiner der beiden kann seine Situation durch eine andere Strategie verbessern, wenn sein Gegner an seinem System festhält.

Wie aber trifft man eine schlaue Wahl, wenn die Situation nicht so übersichtlich ist wie in unserem Beispiel? Vor allem, wenn die Wunschliste die noch zu verteilenden zwanzig Spieler für zwei ganze Fußballmannschaften umfasst, hilft kein Herumprobieren.

Glücklicherweise lässt sich jedoch ein einfaches Rezept für eine schlaue Strategie angeben. Dabei arbeitet man sich in den Wunschlisten von unten nach oben durch. Man beginnt also nicht bei der ersten Runde, sondern überlegt sich zuerst, wie die letzte Runde aussehen wird, geht dann zur vorletzten Runde über, dann zur drittletzten und so weiter, bis man schließlich bei der ersten Runde angekommen ist.

Hier ist die schlaue Strategie im Detail: Bernhards letzte Wahl wird der unterste Spieler auf Arnolds Liste sein (denn das ist genau derjenige, den Arnold Bernhard am Ende übrig lässt; er könnte aus einer anderen Wahl ja keinen Vorteil mehr ziehen). Streiche diesen Spieler aus beiden Listen. Damit erhält jeder Spieler eine reduzierte Liste. Arnolds letze Wahl wird nun der Spieler sein, der in Bernhards reduzierter Liste an letzter Stelle steht (aus demselben Grund wie oben). Streiche auch diesen. Wiederhole diese Vorgehensweise so lange, bis alle Spieler ausgewählt sind.

Für ein aussagekräftiges Beispiel brauchen wir diesmal sechs Spieler zur Auswahl. Arnold und Bernhard haben also je dreimal zu wählen, und ihre Wunschlisten sehen wie folgt aus:

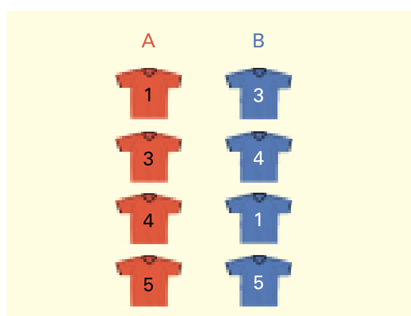


Aus urheberrechtlichen Gründen können wir Ihnen die Bilder leider nicht online zeigen.

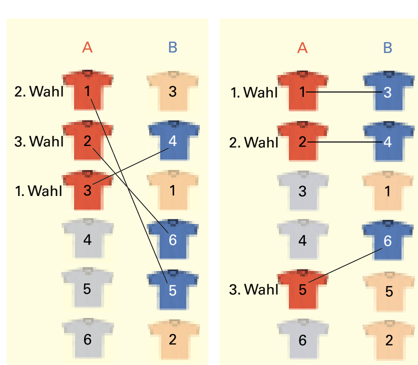
Jeder kennt die Situation aus der eigenen Schulzeit: Warten, bis einer der beiden Teamchefs (oder -chefinnen) einen aufruft und damit für würdig erklärt, in der jeweiligen Mannschaft mitzuspielen. Ein prägendes Erlebnis vor allem für diejenigen, die lange warten mussten, denn dabei wurden nicht nur sportliche Fähigkeiten, sondern auch Sympathien öffentlich bekannt gegeben!

Die dritte Wahl von Bernhard wird der letzte Spieler in Arnolds Liste sein, also Spieler 6. Der wird aus beiden Listen gestrichen. Der letzte Spieler in Bernhards Liste ist nunmehr Spieler 2. Dies wird Arnolds dritte Wahl sein.

Damit haben wir das Problem auf ein kleineres mit nur vier auszuwählenden Spielern reduziert:



Nach demselben Verfahren bestimmen wir jetzt diejenigen Spieler, die in der zweiten Runde gewählt werden. Danach ergeben sich auch die Wahlen der ersten Runde. Die schlaue Vorgehensweise liefert ein Ergebnis, das der Intuition völlig widerspricht. Arnold geht es deutlich besser (links im Bild), wie beim Vergleich mit dem Ergebnis der offensichtlichen Strategie (rechts) sofort auffällt:

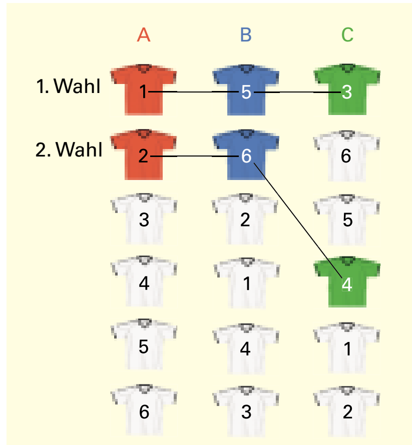


Tatsächlich ist es nicht sehr schwierig zu beweisen, dass die schlaue Strategie für Arnold immer besser ist als die offensichtliche. Bernhard hat dann, will er nicht noch schlechter davonkommen, nur die Möglichkeit, auch eine schlaue Strategie zu verfolgen. Führen also beide eine schlaue Wahl durch, so ist das Ergebnis optimal in dem Sinn, dass keiner seine Mannschaft einseitig durch eine andere Strategie hätte verbessern können.

Jetzt ist auch klar, warum die besten Spieler nicht unbedingt am Anfang gewählt werden, und das Rätsel meiner Schulzeit hat sich geklärt. Mir macht nur noch die Tatsache Sorgen, dass meine Klassenkameraden, und gerade Arnold und Bernhard, in Mathematik immer schlechter waren als ich.

Das Paradox der Spielerwahl

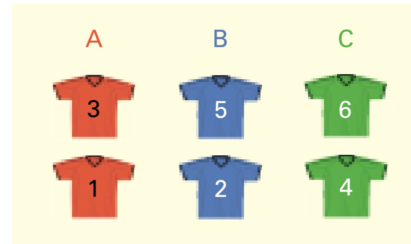
Wenn allerdings mehr als zwei Mannschaften zu bilden sind, ist die Situation noch komplizierter. Dann kann es sogar vorkommen, dass die offensichtliche Strategie für jedes Team besser ist als die schlaue. Dazu ein Beispiel, bei dem Arnold, Bernhard und Christian Mannschaften zu bilden haben. Folgendes Bild zeigt die Wunschlisten und das Ergebnis der offensichtlichen Wahl. ▷



▷ Arnold und Bernhard können gar keine bessere Mannschaft haben, und auch Christian steht nicht allzu schlecht da. Aber Christian könnte, nachdem in der ersten Runde Arnold Spieler 1 und Bernhard Spieler 5 gewählt haben, Spieler 6 wählen statt Spieler 3. Dann würden sich folgende Teams ergeben:

Christian bekommt seine meistgewünschten Spieler 6 und 3, jedoch auf Bernhards Kosten, der sich mit 5 und 4 begnügen muss statt zuvor mit 5 und 6. Da überlegt sich Bernhard, was er diesem Trick von Christian entgegensetzen kann, und entdeckt, dass er in der ersten Runde besser Spieler 2 statt Spieler 5 wählt. Dann muss Christian Spieler 3 nehmen, um seine Wunschkandidaten für sich zu retten, und wir erhalten folgende Mannschaften:

So verbessert sich Bernhard im Vergleich zu vorher, und Christian stört es nicht, da sich für ihn nichts verändert. Doch nun schaut Arnold in die Röhre. Das lässt er sich natürlich nicht gefallen, wählt in der ersten Runde 3 statt 1 und verdirbt damit wenigstens Christian, der mit der Trickserei angefangen hatte, den Spaß:



Das Endergebnis ist ein Gleichgewicht; denn keiner der drei kann sich durch eine einseitige Abweichung von seiner Strategie verbessern. Das lässt sich überprüfen, indem man alle möglichen Wahlen durchprobiert. (Das ist weniger mühsam, als es scheint: Einige Wahlen sind so offensichtlich nachteilig, dass man man sie von vornherein ausschließen und sich auf die Untersuchung von 27 verbleibenden Fällen beschränken kann.) Aber das Gleichgewicht ist alles andere als optimal! Mit der offensichtlichen Strategie wären sie alle drei besser gefahren.

Dies ist einer der zahlreichen Fälle, in denen ein Gleichgewicht und ein für alle günstiger Spielausgang krass auseinander fallen; der einfachste und am intensivsten studierte Fall ist das berüchtigte Gefangenendilemma. Ähnlich wie dieses ist auch das »Paradoxon der Spielerwahl« nicht aufzulösen, ohne dass man eine der Voraussetzungen des Spiels ändert. So könnte man zulassen, dass die drei Kapitäne vorher Vereinbarungen treffen; es bleibt dann die interessante Frage, ob sie sich daran halten. Im Fall von Arnold, Bernhard und Christian hatte der Lehrer das letzte Wort, der »im Sinne aller« nach der »unsinnigen« Wahl der Schüler selbst die Mannschaften einteilte. ◁

AUTOR UND LITERATUR

Dominik Zeillinger hat an der Universität Innsbruck Mathematik studiert und arbeitet dort zurzeit als Doktorand.

Prisoners' dilemma and professional sports drafts. Von Steven J. Brams und Philip D. Straffin in: American Mathematical Monthly, Bd. 86, S. 80, 1979

Weblinks zu diesem Thema finden Sie bei www.spektrum.de unter »Inhaltsverzeichnis«.