Integrierbare Lösungen der Schilling'schen Funktionalgleichung

Diplomarbeit aus dem Fach Mathematik zur Erlangung des Magistergrades an der Naturwissenschaftlichen Fakultät der Leopold-Franzens-Universität Innsbruck

eingereicht im September 2001

von
Dominik Zeillinger

Vorwort

In meiner Diplomarbeit beschäftige ich mich mit speziellen Lösungen einer speziellen Funktionalgleichung, wie der Titel angibt mit den integrierbaren Lösungen der Schilling'schen Funktionalgleichung (einen geschichtlichen Überblick findet man in 1.3, die Hauptresultate und den Aufbau der Arbeit in 1.2). Einige Autoren erarbeiteten spezielle Resultate, die nur für diese Funktionalgleichung gelten. Doch viele Ergebnisse kommen aus der Betrachtung allgemeinerer Fälle. Noch erstaunlicher ist, dass sich die Hauptresultate aus Ergebnissen eines ganz anderen Gebietes ableiten lassen (siehe 4.2). So hatte ich zu Beginn nur recht wenig Material zur Verfügung, doch sind mit der Zeit immer mehr Quellen dazugekommen. Dadurch konnte ich sogar noch Arbeiten einbeziehen, die sozusagen frisch veröffentlicht worden waren.

Beim Erarbeiten der vielen Artikel machte ich die Erfahrung, dass ich so gut wie alles gebrauchen konnte und musste, was ich während meines Studiums gelernt hatte. Manche Methoden musste ich sogar noch zusätzlich erlernen. Dabei hat es mich sehr gefreut auf „gute Bekannte“, auf „berühmte Persönlichkeiten“ zu treffen, die in der Mathematik fast überall anzutreffen sind. So hatte ich das Vergnügen zwei Arbeiten von Erdös zu studieren, auch tauchte der „Goldene Schnitt“ auf und die Kreiszahl π. Letztere natürlich nicht in einer alltäglichen Form, wie man sie beim Rechnen mit cos und sin verwendet, sondern als das historisch erste unendliche Produkt, das auf Vieta zurückgeht.

Die vorliegende Arbeit ist eine Zusammenfassung der Ergebnisse zu den integrierbaren Lösungen der Schilling'schen Funktionalgleichung. Dabei hoffe ich sämtliche bekannten Resultate eingebracht zu haben, so dass diese Arbeit als Einführung dienen kann, für jemanden, $\genfrac{}{}{0pt}{}{\text{der}}{\text{die}}$ auf diesem Gebiet weitere Forschungen betreiben will. Denn es gibt immer noch ungeklärte Fragen, die auf eine Beantwortung warten.

An dieser Stelle möchte ich mich auch bei meinem Betreuer Wolfgang Förg-Rob bedanken. Durch kritische Anmerkungen, Hinweise auf Fehler und Hilfe bei Unklarheiten hat er sehr zum Gelingen dieser Diplomarbeit beigetragen.

Außerdem sei meinem Studienkollegen Clemens Saurer versichert, dass die Ergebnisse auch nach der Einführung des Euro im Jänner 2002 ihre Gültigkeit behalten werden.

Vomp, im September 2001
Dominik Zeillinger

Inhaltsverzeichnis

1 Einleitung, Resultate, Geschichte

1.1 Einleitung

Beim Studium von räumlich chaotischen Strukturen in amorphen (glasähnlichen) Materialien ([41],[44]) stieß Professor Rolf Schilling auf folgende Funktionalgleichung, die nun in der Literatur als Schilling'sches Problem oder Schilling'sche Funktionalgleichung bekannt ist:

1.1 Definition der Schilling'schen Funktionalgleichung. *Die Funktionalgleichung*

$$f(qx) = \frac{1}{4q}(f(x+1) + f(x-1) + 2f(x)) \tag{1}$$

für $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *mit der Beschränkungsbedingung*

$$f(x) = 0 \quad \text{für alle } x \text{ mit} \quad |x| > Q := \frac{q}{1-q}, \tag{2}$$

wobei $q \in]0,1[$ *eine fixe, reelle Zahl ist, heißt Schilling'sche Funktionalgleichung.*

Nun soll noch der Titel der Diplomarbeit genauer erklärt werden. Eine „integrierbare Lösung der Schilling'schen Funktionalgleichung“ sei eine Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, die die Bedingungen (1) und (2) erfüllt und zusätzlich noch uneigentlich Riemann bzw. Lebesgue integrierbar ist.

Weiters bezeichnet λ im Folgenden das Lebesgue-Maß und wir sagen eine Aussage ist für (λ-)fast alle Elemente einer Menge erfüllt, wenn die Menge der Elemente, für die die Bedingung nicht erfüllt ist, Lebesgue-Maß 0 hat. Wie in der Analysis üblich sei für $p \geq 1$

$$L^p := \{g : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \,:\, g \ \lambda\text{-messbar}, \int\limits_{\mathbb{R}} |g|^p d\lambda < \infty\}/\{g : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \,:\, g = 0 \ \text{ fast überall}\}$$

der Raum (der Äquivalenzklassen) der Lebesgue integrierbaren Funktionen mit der Norm

$$\|g\|_p := (\int\limits_{\mathbb{R}} |g|^p \, d\lambda)^{\frac{1}{p}}.$$

Eine L^1-Lösung der Schilling'schen Funktionalgleichung bezeichnet eine Funktion $f \in L^1$, die die Bedingungen (1) und (2) fast überall erfüllt. In dieser Arbeit werden vor allem Ergebnisse für L^1-Lösungen vorgestellt.

1.2 Resultate und Aufbau der Arbeit

Ziel dieser Arbeit ist eine Zusammenfassung der Ergebnisse über Lösungen von (1) und (2), die zusätzlich noch integrierbar sind. Dabei ist der Text wie folgt aufgebaut:

Im Punkt 1.3 werden die Geschichte der Schilling'schen Funktionalgleichung und die Hauptresultate in einer Zeittafel dargestellt.

In 2.1 wird gezeigt, dass die Beschränkungsbedingung (2) nicht gestellt werden müsste und in 2.2, dass es genügt nach L^1-Lösungen mit Integralwert 1 zu suchen. Für einen Wert q ist die L^1-Lösung mit Integralwert 1, falls sie existiert, eindeutig bestimmt.

Der Punkt 3.1 zeigt, wie man die Fouriertransformation einsetzen kann, um Lösungen zu finden. In 3.2 wird das Gebiet der unendlichen Bernoulli-Faltungen vorgestellt und gezeigt in welchem Zusammenhang es mit der Schilling'schen Funktionalgleichung steht.

Im Punkt 4.1 werden Werte von q vorgestellt, für die es keine nichttrivialen L^1-Lösungen geben kann. Dies sind die sogenannten P.V. Zahlen, algebraische Zahlen, die ebenfalls vorgestellt und etwas näher beschrieben werden. Punkt 4.2 enthält das Hauptresultat: Für $q \in]0, \frac{1}{2\sqrt{2}}[$ gibt es keine nichttriviale L^1-Lösung, jedoch für fast alle $q \in [\frac{1}{2\sqrt{2}}, 1[$. Dabei sind solche Lösungen stetig für $q \in [\frac{1}{2}, 1[$ und nicht stetig für $q \in]\frac{1}{2\sqrt{2}}, \frac{1}{2}[$. Weiters wird jeweils für $q = \frac{1}{2}$ und $q = \frac{1}{\sqrt{2}}$ die konkrete Lösung angegeben und ein Verfahren, mit dem man aus einer Lösung für einen speziellen Wert von q die Lösung für einen anderen Wert erhält. Abschließend werden noch einige algebraischen Zahlen vorgestellt, für die es nichttriviale L^1-Lösungen geben muss.

Punkt 4.3 gibt Kriterien an, mit denen man Werte auf Existenz bzw. Nichtexistenz einer nichttrivialen L^1-Lösung prüfen kann.

In 5 werden Sätze angeführt, die in den vorhergehenden Punkten verwendet wurden.

1.3 Geschichte

In den letzten Jahren wurde die Schilling'sche Funktionalgleichung, sowie eine verallgemeinerte Form, intensiv untersucht. Die Autoren und die Hauptresultate sind aus folgender Zeittafel ersichtlich.

1985 Reichert, Schilling: Arbeit mit dem Titel „Glasslike properties of particles with anharmonic and competing interactions“ (siehe [41]), die man als Vorläufer der Arbeit von 1992 (siehe [44]) sehen kann.

1988 Baron: Ist $q \in]0, \sqrt{2} - 1[$ und f eine Lösung von (1) und (2),die in einer Nullumgebung beschränkt ist, so ist $f = 0$ (Schilling war dieses Ergebnis für $q \in]0, \frac{1}{3}[$ bereits bekannt). Ist f eine Lösung von (1) und (2) für $q = \frac{1}{2}$, in $]0, 1[$ zweimal differenzierbar und ist $\sup\{|f''(x)| : x \in]0, 1[\} < \infty$, dann gibt es ein $c \in \mathbb{R}$ so, dass

$$f(x) = \max(c(|x| - 1), 0)$$

für $x \in \mathbb{R}$ ist (Schilling kannte bereits die Lösung $f(x) = \max(1 - |x|, 0)$ für $x \in \mathbb{R}$ für $q = \frac{1}{2}$). Siehe [1].

1992 Grząślewicz: Seien $A, D \in \mathbb{R}, B, C \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ und $q \in]0, 1[$, dann ist eine Lösung $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ der Funktionalgleichung

$$A(qx) = Bf(x + 1) + Cf(x - 1) + Df(x)$$

eindeutig durch die Einschränkung $f|_{[-1,1]}$ bestimmt, wenn diese die Bedingung

$$(A - D)f(0) = Bf(1) + Cf(-1)$$

erfüllt. Weiters wird die allgemeine Lösung der obigen Funktionalgleichung präsentiert. Siehe [21].

1992 Schilling: In dieser Arbeit werden räumlich chaotische Strukturen glasähnlicher Materialien studiert und in diesem Zusammenhang die Schilling'sche Funktionalgleichung hergeleitet. Siehe [44].

1993 Baron, Volkmann: Es gibt, bis auf Normierung, höchstens eine $\mathbb{R}$-integrierbare Lösung von (1) und (2). Siehe [2]

1993 Morawiec: Sei $n \in \mathbb{N}_{>0}$, q_n die eindeutige Zahl $x \in]\frac{1}{3}, \frac{1}{2}[$ mit $x^{n+1} - 3x + 1 = 0$ und $q \in]0, q_n]$. Es wird eine Menge $A_q^n \subseteq \mathbb{R}$ angegeben, so dass jede Lösung von (1) und (2), die in einer Umgebung eines Punktes dieser Menge beschränkt ist, gleich der Nullfunktion ist. Weiters wird festgestellt, dass für $q \in]0, \frac{1}{3}]$ die Menge $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_q^n$, die dann der Menge $\{\sum_{n=1}^{\infty} \varepsilon(n) q^n : \varepsilon \in \{-1, 0, 1\}^{\mathbb{N}}\}$ entspricht, die größte mit dieser Eigenschaft ist. Siehe [31] und [34].

1994 Baron, Simon, Volkmann: Mit Hilfe temperierter Distributionen werden nichttriviale, stetige Lösungen für $q = \frac{1}{\sqrt[n]{2}}, n = 2, 3, 4, \ldots$ präsentiert. Weiters wird die Nichtexistenz nichttrivialer L^1-Lösungen für $0 < q < \frac{1}{2}$ bewiesen (auch für $q = \frac{-1+\sqrt{5}}{2}$ unter der Zusatzannahme, dass f in 0 stetig ist). Siehe [3].

1994 Borwein, Girgensohn: Ist die Verteilungsfunktion der Zufallsreihe $\sum_{n=0}^{\infty} \pm a^n$ absolut stetig, so gibt es eine nichttriviale L^1-Lösung für $q = a$ der Schilling'schen Funktionalgleichung. Außerdem gibt es für fast alle q in der Nähe von 1 solche nichttriviale Lösungen und es werden algebraische Zahlen angegeben, bei denen es solche Lösungen gibt. Weiters gibt es keine nichttrivialen integrierbare Lösungen für inverse von P.V.-Zahlen. Siehe [7].

1994 Förg-Rob: Im ersten Teil wird gezeigt, dass Bedingung (2) in gewissem Sinne „natürlich“ ist. Weiters wird die allgemeine Lösung von (1) mit unbeschränktem Träger präsentiert (es kann auf einem speziellen Intervall eine beliebige Funktion gewählt werden, die dann eindeutig zu einer Lösung erweitert wird). Weiters werden solche Lösungen auf Stetigkeit, Differenzierbarkeit, Messbarkeit und Integrierbarkeit untersucht. Siehe [17].

Im zweiten Teil wird eine - in einem gewissen Sinne „erschöpfende“ - Antwort auf die Frage nach der allgemeinen Lösung von (1) und (2) (wieder auch in Hinsicht auf Stetigkeit, Differenzierbarkeit, Messbarkeit und Integrierbarkeit) für $0 < q < \frac{1}{3}, q = \frac{1}{3}$ und $q = \frac{1}{2}$ gegeben. Siehe [18].

1994 Morawiec: Ist $0 < q \leq \frac{1}{3} - \frac{\sqrt[3]{2}}{3} + \frac{\sqrt[3]{4}}{3}$, dann ist die Nulllösung die einzige Lösung von (1) und (2), die auf einer Umgebung mindestens eines Punktes der Menge

$$\{\varepsilon \sum_{i=1}^{n} q^n : n \in \mathbb{N} \cup \{0, \infty\}, \varepsilon \in \{-1, 1\}\}$$

beschränkt ist. Siehe [32].

1995 Morawiec: Ist $q \in \{\frac{\sqrt{3}-1}{2}, \frac{3-\sqrt{5}}{2}, \sqrt{2} - 1, \frac{\sqrt{5}-1}{2}\}$ und ist eine Lösung f von (1) und (2) in jedem Punkt im Intervall $]-Q, Q + \delta[$ oder $]-Q - \delta, Q[$ für ein $\delta > 0$ entweder linksseitig oder rechtsseitig stetig, dann ist $f = 0$. Siehe [33].

1996 Derfel, Schilling: Für $0 < q < \frac{1}{2}$ gibt es keine von Null verschiedene, stetige Lösung von (2) und (1) mit kompaktem Träger, aber für fast alle $\frac{1}{2} < q < 1$. Die Wörter „für fast alle q“ im vorigen Satz können nicht weggelassen werden. Ist μ eine PV Zahl, dann gibt es für $q := \mu^{-1}$ keine integrierbare Lösung von (1) und (2). Siehe [14].

1997 Ciepliński: Es wird gezeigt, dass unter bestimmten Bedingungen an a, b, c, h, g und Q die Nullfunktion die einzige Lösung $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ der Funktionalgleichung

$$\varphi(g(x)) = a(x)\varphi(h(x)) + b(x)\varphi(h^{-1}(x)) + c(x)\varphi(x)$$

ist, die auf einer Nullumgebung beschränkt und für $|x| > Q$ gleich Null ist. Siehe [8].

1998 Ciepliński, Grząślewicz: Seien $g, h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, A, B, D \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Dann ist die Lösung $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ der Funktionalgleichung

$$A\varphi(g(x)) = B\varphi(h(x)) + D\varphi(x)$$

für $x \in \mathbb{R}$ eindeutig durch die Einschränkung $\varphi|_{[h^{-1}(x_0),x_0]}$ mit

$$A\varphi(g(h^{-1}(x_0))) = B\varphi(x_0) + D\varphi(h^{-1}(x_0))$$

definiert. Siehe [9].

1998 Peres, Solomyak: Für fast alle $q \in]\frac{1}{2\sqrt{2}}, 1[$ gibt es eine nichttriviale L^1-Lösung der Schilling'schen Funktionalgleichung. Siehe [38].

2000 Girgensohn, Morawiec: Eine L^1-Lösung der Schilling'schen Funktionalgleichung ist fast überall positiv. Siehe [20].

Es sollte jedoch erwähnt werden, dass manche Ergebnisse schon früher in anderem Zusammenhang bewiesen wurden. Setzen wir zum Beispiel $\mu := \frac{1}{q}$ und schreiben (1) um in

$$f(x) = \mu(\frac{1}{4}f(\mu x - 1) + \frac{1}{2}f(\mu x) + \frac{1}{4}f(\mu x + 1)),$$

so sehen wir, dass die Schilling'sche Funktionalgleichung ein Spezialfall der „two-scale difference equation" (oder auch „refinement equation")

$$f(x) = \sum_{n=0}^{N} c_n f(\alpha x - \beta_n)$$

ist, wobei gilt $\alpha > 1, \beta_0 < \beta_1 < \ldots < \beta_n \in \mathbb{R}$ und $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Diese allgemeinere Funktionalgleichung wurde in [11], [12] und [13] studiert. So werden in [11] Existenz- und Eindeutigkeitsaussagen gemacht, die dann auch in [2] nur für (1) bewiesen wurden. Außerdem wurden viele Resultate auf einem anderen Forschungsgebiet erzielt, die für die Schilling'sche Funktionalgleichung verwendet werden konnten. Siehe dazu 3.2.

2 Beschränkungsbedingung und Eindeutigkeit

In diesem Abschnitt werden wir zeigen, dass die Bedingung (2) in einem gewissen Sinn natürlich ist und im Falle einer L^1 - Lösung nicht gestellt werden müsste. Außerdem wird sich herausstellen, dass wir nicht zwischen Riemann und Lebesgue integrierbaren Lösungen unterscheiden müssen, sondern dass es genügt L^1 - Lösungen zu betrachten. Es reicht sogar aus nur L^1 - Lösungen zu suchen, deren Integral den Wert 1 haben.

2.1 Beschränkungsbedingung

Zuerst untersuchen wir, inwieweit die Beschränkungsbedingung im allgemeinen Fall „natürlich" ist. Dabei ist besonders zu beachten, dass der Wert Q folgende Eigenschaft besitzt:

$$q(Q + 1) = Q.$$

Dies ist durch eine einfache Rechnung leicht einzusehen, denn

$$q(Q+1) = q(\frac{q}{1-q} + 1) = \frac{q^2}{1-q} + q = \frac{q^2}{1-q} + \frac{q(1-q)}{1-q} = \frac{q^2 + q - q^2}{1-q} = \frac{q}{1-q} = Q.$$

2.1.1 Definition. *1. Sei $S(f) := \{x \in \mathbb{R} \,|\, f(x) \neq 0\}$ die Menge aller Punkte, deren Funktionswert ungleich 0 ist.*

2. Sei $T(f) := \overline{S(f)}$ der Abschluss von $S(f)$.

2.1.2 Hilfssatz. *Sei f eine Lösung von (1) mit $T(f) \subseteq]-\infty, b]$ für ein $b \in \mathbb{R}$, dann gilt:*

1. Ist $b \geq Q$, dann ist $T(f) \subseteq]-\infty, Q]$. Gilt zusätzlich, dass $q \neq \frac{1}{4}$ ist, so ist $S(f) \subseteq]-\infty, Q[$.

2. Ist $b < Q$, so ist $f = 0$.

Beweis. 1. Sei $b \geq Q$. Wir definieren die Folge $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ durch $b_0 := b, b_{n+1} := q(b_n + 1)$ und zeigen mit vollständiger Induktion über n, dass sie streng monoton fallend ist und den Grenzwert Q besitzt. Für den Induktionsanfang sei $n = 0$. Dann gilt $b_0 = b > Q = \frac{q}{1-q}$, woraus folgt:

$$b_0(1 - q) = b_0 - b_0 q > q \Rightarrow b_0 > q + b_0 q = q(b_0 + 1) = b_1.$$

Da $b_0 > Q$ ist, folgt:

$$b_1 = q(b_0 + 1) > q(Q + 1) = Q.$$

Also insgesamt:

$$b_0 > b_1 > Q.$$

Der Induktionsschritt von n auf $n + 1$ verläuft analog zum Induktionsanfang. Indem wir b_0 durch b_n ersetzen, erhalten wir

$$b_n > b_{n+1} > Q.$$

Die Folge $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ist also streng monoton fallend und von unten durch Q beschränkt. Damit besitzt sie einen Grenzwert B, für den gilt

$$B = \lim_{n\to\infty} b_n = \lim_{n\to\infty} b_{n+1} = \lim_{n\to\infty} q(b_n + 1) = q(B + 1).$$

Es gilt also

$$B = q(B + 1) = qB + q \Rightarrow B - qB = B(1 - q) = q$$

und damit

$$B = \frac{q}{1 - q} = Q.$$

Somit hat $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ den Grenzwert Q.

Wir zeigen weiters mit vollständiger Induktion über n, dass $T(f) \subseteq]-\infty, b_n]$ ist. Für $n = 0$ ist $b_0 = b$ und damit $T(f) \subseteq]-\infty, b]$ nach Voraussetzung. Für den Induktionsschritt n auf $n + 1$ sei nun $x > b_n + 1$, dann gilt $x + 1 > x > x - 1 > b_n$ und da nach der Induktionsannahme $T(f) \subseteq]-\infty, b_n]$ ist, gilt $f(x + 1) = f(x) = f(x - 1) = 0$ und damit

$$f(qx) = \frac{1}{4q}(0 + 0 + 2 \cdot 0) = 0.$$

Setzen wir $y := qx$, gilt also für alle $x > b_n + 1$

$$f(qx) = 0 \Leftrightarrow f(y) = 0 \Leftrightarrow \frac{y}{q} = x > b_n + 1 \Leftrightarrow y > q(b_n + 1) = b_{n+1}.$$

Damit ist $T(f) \subseteq]-\infty, b_{n+1}]$. Da dies für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt und $\lim_{n\to\infty} b_n = Q$ ist, gilt $T(f) \subseteq]-\infty, Q]$.

Ist nun außerdem $q \neq \frac{1}{4}$, dann erhalten wir

$$f(Q) = f(q(Q+1)) = \frac{1}{4q}(f(Q) + \underbrace{f(Q+2)}_{=0} + \underbrace{2f(Q+1)}_{=0}) = \frac{1}{4q} f(Q),$$

also $f(Q) = 0$ und damit $S(f) \subseteq]-\infty, Q[$.

2. Sei nun $b < Q$. Wir unterscheiden die Fälle $b > 0$ und $b \leq 0$. Sei zuerst $b > 0$. Sei $x > \frac{b}{q} > b$, dann ist $f(x) = 0, f(x+1) = 0$ und (da $x > \frac{b}{q}$, also $qx > b$ ist) $f(qx) = 0$. Es folgt $f(x-1) = 0$, da

$$\underbrace{f(qx)}_{=0} = \frac{1}{4q}(\underbrace{f(x+1)}_{=0} + f(x-1) + 2\underbrace{f(x)}_{=0})$$

ist. Da also für alle $x > \frac{b}{q}$ gilt, dass $f(x-1) = 0$ ist, folgt, dass $T(f) \subseteq]-\infty, \frac{b}{q} - 1]$ ist. Wir definieren die Folge $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ durch $b_0 := b, b_{n+1} := \frac{b_n}{q} - 1$. Verwenden wir obige Rechnung für eine vollständige Induktion über n, so erhalten wir sofort, dass $T(f) \subseteq]-\infty, b_n]$ für alle $n \in \mathbb{N}$ ist. Weiters zeigen wir durch vollständige Induktion über n, dass die Folge streng monoton fallend ist. Für $n = 0$ ist $b_0 = b$ und es gilt:

$$b < Q = \frac{q}{1-q} \Rightarrow b(1-q) < q \Rightarrow \frac{b}{q} - b < 1.$$

Also:

$$\frac{b}{q} - 1 = b_1 < b < Q.$$

Der Induktionsschritt von n auf $n+1$ folgt sofort, wenn wir b_0 durch b_n ersetzen und damit ist $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ streng monoton fallend. Angenommen die Folge ist weiters nach unten beschränkt, dann hat sie einen Grenzwert B, für den gilt

$$B = \lim_{n \to \infty} b_n = \lim_{n \to \infty} b_{n+1} = \lim_{n \to \infty} \frac{b_n}{q} - 1 = \frac{B}{q} - 1.$$

Durch Umformen erhalten wir aber

$$B(1 - \frac{1}{q}) = -1 \Rightarrow B\frac{q-1}{q} = -1 \Rightarrow B = \frac{-q}{q-1} = Q$$

im Widerspruch zu $b < Q$. Die oben definierte Folge ist also nicht nach unten beschränkt und damit gibt es ein $n \in \mathbb{N}$ mit $b_n \leq 0$ und $T(f) \subseteq]-\infty, 0]$. So führt der erste Fall $b > 0$ direkt zum zweiten Fall $b \leq 0$.

Sei nun also $b \leq 0$ und $x > b$. Damit gilt dann auch $x + 1 > x > b$ und (da $q \in]0,1[$ und $b \leq 0$ ist) $qx > b$. Es folgt direkt $f(x) = f(qx) = f(x+1) = 0$ und $f(x-1) = 0$ durch Einsetzen in (1) und damit ist $T(f) \subseteq]-\infty, b-1]$. Durch neuerliche Definition einer Folge $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ durch $b_0 := b, b_{n+1} := b - 1$ und durch Induktion über n erhalten wir mit Hilfe der obigen Rechnung, dass $T(f) = \emptyset$ und damit $f = 0$ ist, womit die Behauptung bewiesen ist. [17] ☺

2.1.3 Hilfssatz. *Sei f eine Lösung von (1) mit $T(f) \subseteq [a, \infty[$ für ein $a \in \mathbb{R}$, dann gilt*

1. *Ist $a \leq -Q$, dann ist $T(f) \subseteq [-Q, \infty[$. Gilt zusätzlich, dass $q \neq \frac{1}{4}$ ist, so ist $S(f) \subseteq]-Q, \infty[$.*

2. *Ist $a > -Q$, so ist $f = 0$.*

Beweis. Der Beweis kann durch Verwendung derselben Ideen wie in 2.1.2 geführt werden. [17] ☺

2.1.4 Satz. *Sei $f \neq 0$ eine Lösung von (1), dann ist $S(f)$ genau in einem der folgenden Intervalle enthalten und nicht in einem Teilintervall*

1. *Für $q \neq \frac{1}{4}$: $[-Q, Q[$ oder $]-\infty, Q[$ oder $]-Q, \infty[$ oder $\mathbb{R}$.*
2. *Für $q = \frac{1}{4}$: $]-Q, Q[$ oder $]-\infty, Q[$ oder $]-Q, \infty[$ oder $\mathbb{R}$ oder $[-Q, Q]$ oder $]-Q, Q]$ oder $[-Q, Q[$ oder $]-\infty, Q]$ oder $[-Q, \infty[$.*

Beweis. Der Satz folgt direkt aus 2.1.2 und 2.1.3. [17] ☺

Förg-Rob zeigte in [17] dass diese Fälle wirklich alle auftreten. Damit sehen wir, dass die Bedingung (2) bereits für allgemeine Lösungen im Sinne von 2.1.4 natürlich ist. Noch mehr trifft dies jedoch auf integrierbare Lösungen zu. Bevor wir dies jedoch beweisen, wollen wir zeigen, dass es genügt sich auf L^1-Lösungen zu beschränken.

2.1.5 Hilfssatz. *(a) Sei f eine Lebesgue-integrierbare Lösung von (1), dann ist die Funktion $F(x) := \int_{]-\infty,x]} f \, d\lambda$ sinnvoll definiert und hat folgende Eigenschaften:*

1. *F ist stetig.*
2. *$\lim\limits_{x \to -\infty} F(x) = 0$.*
3. *$\lim\limits_{x \to \infty} F(x) = \int_{\mathbb{R}} f \, d\lambda \in \mathbb{R}$.*
4. *$F(qx) = \frac{1}{4}(F(x+1) + F(x-1) + 2F(x))$ für alle $x \in \mathbb{R}$.*

(b) Sei f eine Lösung von (1), deren uneigentliches Riemann Integral über $\mathbb{R}$ existiert. Dann ist die Funktion $F(x) := \int_{-\infty}^{x} f(t) \, dt$ sinnvoll definiert und hat folgende Eigenschaften:

1. *F ist stetig.*
2. *$\lim\limits_{x \to -\infty} F(x) = 0$.*
3. *$\lim\limits_{x \to \infty} F(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \, dt \in \mathbb{R}$.*
4. *$F(qx) = \frac{1}{4}(F(x+1) + F(x-1) + 2F(x))$ für alle $x \in \mathbb{R}$.*

Beweis. (a) Die Punkt 1, 2 und 3 sind aus der elementaren Integrationstheorie bekannt (siehe z.B. [23]). Punkt 4 kann direkt berechnet werden:

$$
\begin{aligned}
F(qx) &= \int\limits_{]-\infty,qx]} f(t) \, d\lambda(t) == \int\limits_{]-\infty,x]} f(qt)q \, d\lambda(t) = \\
&= q \int\limits_{]-\infty,x]} \frac{1}{4q}(f(t+1) + f(t-1) + 2f(t)) \, d\lambda(t) = \\
&= \frac{1}{4}(\int\limits_{]-\infty,x+1]} f(t) \, d\lambda(t) + \int\limits_{]-\infty,x-1]} f(t) \, d\lambda(t) + 2 \int\limits_{]-\infty,x]} f(t) \, d\lambda(t)) = \\
&= \frac{1}{4}(F(x+1) + F(x-1) + 2F(x)).
\end{aligned}
$$

(b) Punkt 1 ist aus der elementaren Analysis bekannt, 2 und 3 folgen direkt aus der Definition des uneigentlichen Riemann-Integrals und 4 kann direkt berechnet werden:

$$F(qx) = \int_{-\infty}^{qx} f(t)\,dt = \int_{-\infty}^{x} f(qt)q\,dt = q\int_{-\infty}^{x} \frac{1}{4q}(f(t+1)+f(t-1)+2f(t))\,dt =$$

$$= \frac{1}{4}(\int_{-\infty}^{x+1} f(t)\,dt + \int_{-\infty}^{x-1} f(t)\,dt + 2\int_{-\infty}^{x} f(t)\,dt) = \frac{1}{4}(F(x+1)+F(x-1)+2F(x)).$$

[17] ☺

2.1.6 Satz. *Wir betrachten die Funktion F aus 2.1.5. Für diese Funktion F gibt es ein $G \in \mathbb{R}$, so dass*

$$F(x) = G$$

für alle $x > Q$ ist und

$$F(x) = 0$$

für alle $x < -Q$.

Beweis. Nach Punkt 3 aus 2.1.5 gibt es ein $G \in \mathbb{R}$ mit $G = \lim_{x\to\infty} F(x) \in \mathbb{R}$. Sei weiters $\varepsilon > 0$, dann gibt es eine Zahl $z \in \mathbb{R}$ so, dass $|F(x) - G| < \varepsilon$ für jedes $x > z$ ist. Ohne Einschränkung der Allgemeinheit können wir $z > Q$ annehmen und somit gilt

$$G - \varepsilon < F(x-1), F(x), F(x+1) < G + \varepsilon$$

für alle $x > z + 1$. Mit Eigenschaft 4 von F aus 2.1.5 folgt sofort

$$G - \varepsilon < F(qx) < G + \varepsilon$$

für alle $x > z + 1$. Mit anderen Worten hält die Ungleichung $|F(x) - G| < \varepsilon$ für jedes $x > q(z+1)$. Definieren wir nun eine Folge durch $z_0 := z, z_{n+1} := q(z_n+1)$ für $n \geq 0$, so gilt für jedes $n \in \mathbb{N}$ wegen desselben Argumentes $|F(x) - G| < \varepsilon$ für jedes $x > z_n$. Da $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ gegen Q konvergiert (siehe 2.1.2), gilt $|F(x) - G| < \varepsilon$ für jedes $x > Q$. Da ε beliebig gewählt werden kann, muss $F(x) = G$ sein für jedes $x > Q$.

Die selbe Idee führt zum Ergebnis $F(x) = 0$ für $x < -Q$. [17] ☺

2.1.7 Satz. *Die Funktion F aus 2.1.5 mit der Normierung $\lim\limits_{x\to\infty} F(x) = 1$ ist eindeutig bestimmt und monoton wachsend.*

Beweis. Sei

$$B := \{h : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \,:\, h \text{ stetig und monoton wachsend}, h|_{]-\infty,-Q[} = 0, h|_{]Q,\infty[} = 1\}.$$

Wir betrachten für $h \in B$ die Transformation $T : h \mapsto T(h)$ mit

$$T(h)(x) = \frac{1}{4}(h(\frac{x}{q}+1) + h(\frac{x}{q}-1) + 2h(\frac{x}{q}))$$

für alle $x \in \mathbb{R}$. Die Addition von skalaren Vielfachen einer stetigen, monoton wachsenden Funktion ist wieder stetig und monoton wachsend. Weiters gilt für $x < -Q$ (da $\frac{Q}{q} = Q+1$ ist)

$$\begin{aligned} T(h)(x) &= \frac{1}{4}(h(\frac{x}{q}+1) + h(\frac{x}{q}-1) + 2h(\frac{x}{q})) \leq \\ &\leq \frac{1}{4}(h(-\frac{Q}{q}+1) + h(-\frac{Q}{q}-1) + 2h(-\frac{Q}{q})) = \\ &= \frac{1}{4}(h(-Q) + h(-Q-2) + 2h(-Q-1)) = 0 \end{aligned}$$

und für $x > Q$

$$\begin{aligned} T(h)(x) &= \frac{1}{4}(h(\frac{x}{q}+1) + h(\frac{x}{q}-1) + 2h(\frac{x}{q})) \geq \\ &\geq \frac{1}{4}(h(\frac{Q}{q}+1) + h(\frac{Q}{q}-1) + 2h(\frac{Q}{q})) = \\ &= \frac{1}{4}(h(Q+2) + h(Q) + 2h(Q+1)) = 1. \end{aligned}$$

Damit ist für $h \in B$ auch $T(h) \in B$, also $T : B \to B$.

Wie man sich leicht überlegt hat für $k \geq 2$ die Transformation $T^k = \underbrace{T \circ \ldots \circ T}_{\text{k-mal}}$ für $x \in \mathbb{R}$ die Form

$$T^k(h)(x) = \frac{1}{4^k} \sum_{j=1}^{4^k} h(\varphi_j(x)),$$

wobei es l_1, l_2 gibt mit $1 \leq l_1, l_2 \leq 4^k$ und

$$\varphi_{l_1}(x) = \frac{x}{q^k} + 1 + \frac{1}{q} + \ldots + \frac{1}{q^{k-1}} \text{ bzw. } \varphi_{l_2}(x) = \frac{x}{q^k} - 1 - \frac{1}{q} - \ldots - \frac{1}{q^{k-1}}.$$

Nun gibt es ein $k \in \mathbb{N}$, so dass $1 + \frac{1}{q} + \ldots + \frac{1}{q^{k-1}} > Q$ ist. Für dieses k und $g, h \in B$ gilt dann: Ist $x \geq 0$, so ist

$$\begin{aligned} &|(T^k g - T^k h)(x)| = |\frac{1}{4^k} \sum_{j=1}^{4^k} (g(\varphi_j(x)) - h(\varphi_j(x)))| = \\ &\quad = |\frac{1}{4^k}(\sum_{j \neq l_1, j=1}^{4^k} (g(\varphi_j(x)) - h(\varphi_j(x))) + \underbrace{g(\overbrace{\varphi_{l_1}(x)}^{\geq Q}) - h(\overbrace{\varphi_{l_1}(x)}^{\geq Q})}_{=0})| \leq \frac{4^k - 1}{4^k} \|g - h\|_\infty. \end{aligned}$$

Für $x \leq 0$ ist ebenfalls

$$\begin{aligned} &|(T^k g - T^k h)(x)| = |\frac{1}{4^k} \sum_{j=1}^{4^k} (g(\varphi_j(x)) - h(\varphi_j(x)))| = \\ &\quad = |\frac{1}{4^k}(\sum_{j \neq l_2, j=1}^{4^k} (g(\varphi_j(x)) - h(\varphi_j(x))) + \underbrace{g(\overbrace{\varphi_{l_2}(x)}^{\leq -Q}) - h(\overbrace{\varphi_{l_2}(x)}^{\leq -Q})}_{=0})| \leq \frac{4^k - 1}{4^k} \|g - h\|_\infty. \end{aligned}$$

Und damit ist

$$\|T^k g - T^k h\|_\infty \leq \underbrace{\frac{4^k - 1}{4^k}}_{<1} \|g - h\|_\infty.$$

Also ist T^k kontrahierend. Da B mit der Supremumsnorm vollständig ist, gibt es nach dem Banach'schen Fixpunktsatz genau ein $F \in B$ mit

$$T(F) = F.$$

Für dieses eindeutig bestimmte und monoton wachsende F gilt für alle $x \in \mathbb{R}$:

$$F(x) = \frac{1}{4}(F(\frac{x}{q} + 1) + F(\frac{x}{q} - 1) + 2F(\frac{x}{q})).$$

Dies ist äquivalent zu:

$$F(\frac{x}{q}) = \frac{1}{4}(F(x + 1) + F(x - 1) + 2F(x)).$$

☺

2.1.8 Folgerung. *Ist f eine Lösung von (1), die uneigentlich Riemann oder Lebesgue integrierbar ist, so hat f konstantes Vorzeichen (bis auf eine Menge vom Maß 0).*

Beweis. Ist einerseits f eine Riemann-integrierbare Lösung von (1), dann ist die Funktion $F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)\,dt = \int_{-Q}^{x} f(t)\,dt$ nach 2.1.7 eindeutig bestimmt, monoton wachsend und positiv. Damit muss f konstantes Vorzeichen haben.

Ist andererseits f eine Lebesgue integrierbare Lösung von (1), dann ist die Funktion $F(x) = \int_{]-\infty,x]} f(t)\,dt = \int_{[-Q,x]} f(t)\,dt$ nach 2.1.7 eindeutig bestimmt, monoton wachsend und positiv. Damit muss f konstantes Vorzeichen haben. ☺

2.1.9 Folgerung. *Ist f eine Lösung von (1), die uneigentlich Riemann integrierbar ist, so ist f auch Lebesgue integrierbar.*

Beweis. Nach 2.1.8 hat f konstantes Vorzeichen. Wir können f ohne Beschränkung der Allgemeinheit positiv annehmen und damit stimmen das Riemann- und das Lebesgue-Integral überein. ☺

Aufgrund dieser Folgerung müssen wir also im Folgenden nicht mehr zwischen uneigentlich Riemann-integrierbaren und Lebesgue-integrierbaren Lösungen unterscheiden. Es genügt L^1-Lösungen zu untersuchen. Weiters zeigt der nächste Satz, dass die Beschränkungsbedingung (2) für L^1-Lösungen gar nicht gestellt werden müsste.

2.1.10 Satz. *Sei f eine L^1-Lösung von (1), dann verschwindet f fast überall außerhalb des Intervalls $[-Q, Q]$.*

Beweis. Nach 2.1.6 gibt es ein $G \in \mathbb{R}$, so dass $F(x) = G$ für alle $x > Q$ ist. Durch Verwendung derselben Argumente wie in 2.1.6 in Richtung $-\infty$ erhalten wir $F(x) = 0$ für alle $x < -Q$. Folglich muss f außerhalb des Intervalls $[-Q, Q]$ fast überall gleich 0 sein. [17] ☺

Das Ergebnis von 2.1.10 wird für (1) und (2) ebenfalls in [3] hergeleitet und allgemeiner für „two-scale difference equations“ in [11].

2.2 Eindeutigkeit

Nun zur Eindeutigkeit einer L^1 - Lösung von (1) und was darunter zu verstehen ist.

2.2.1 Satz. *Ist f eine L^1-Lösung von (1), dann ist sie bis auf eine Konstante $c \in \mathbb{R}$ eindeutig bestimmt. Das heißt: Sind f, g L^1-Lösungen von (1) zu einem speziellen q mit $\int f \neq 0$, dann gibt es ein $c \in \mathbb{R}$, so dass $g = c \cdot f$ ist (fast überall). Ist speziell auch $\int g \neq 0$, dann ist $c \neq 0$.*

Beweis. Die Behauptung ist klar für $\int g = 0$. Dann ist klarerweise $c = 0$. Seien also f, g zwei nichttriviale L^1-Lösung von (1) zu einem speziellen Wert q mit

$$c_1 := \int\limits_{\mathbb{R}} f(x)\, d\lambda(x) \neq 0 \neq \int\limits_{\mathbb{R}} g(x)\, d\lambda(x) =: c_2.$$

Setzen wir jetzt $f_1 := \frac{1}{c_1} f$ und $g_1 := \frac{1}{c_2} g$, dann gilt:

$$\int\limits_{\mathbb{R}} f_1(x) d\lambda(x) = 1 = \int\limits_{\mathbb{R}} g_1(x) d\lambda(x).$$

Ist weiters $F_1(x) := \int_{]-\infty,x]} f_1(t) d\lambda(t)$ und $G_1(x) := \int_{]-\infty,x]} G_1(t) d\lambda(t)$, so ist nach 2.1.7 $F_1 = G_1$ und damit ist $f_1 = g_1$ fast überall. Damit gilt jedoch

$$g = \frac{c_1}{c_2} f$$

und wir definieren $c := \frac{c_1}{c_2}$. Mit 2.1.8 folgt der Rest der Behauptung, da f und g konstantes Vorzeichen haben. ☺

Aufgrund dieses Satzes ist klar, dass falls eine L^1-Lösung von (1) existiert, es auch eine eindeutige Lösung mit Integral 1 gibt. Diese soll einen speziellen Namen erhalten.

2.2.2 Definition. *Ist f eine L^1-Lösung von (1) für ein spezielles q mit $\int_{\mathbb{R}} f\, d\lambda = 1$, so ist diese nach 2.2.1 eindeutig (bis auf eine Menge von Punkten mit Maß 0) und heißt die Schilling-Funktion zum Wert q oder einfach die Schilling-Funktion.*

2.2.3 Korollar. *Um für einen speziellen Wert q alle Riemann bzw. Lebesgue integrierbaren Lösungen der Schilling'schen Funktionalgleichung zu finden, genügt es, die Schilling-Funktion zum Wert q zu finden.*

Beweis. Aus 2.1.9 folgt die Beschränkung auf L^1-Lösungen, mit 2.1.10 kann (2) weggelassen werden und mit 2.2.1 ist die Eindeutigkeit für den Integralwert 1 gesichert. ☺

3 Lösungsansätze

In diesem Abschnitt werden jene Hilfsmittel vorgestellt, mit denen wir im nächsten Abschnitt Lösungen finden werden.

3.1 Die Fourier-Transformierte einer L^1-Lösung

Wir wollen zu einem gegebenen q die Schilling-Funktion finden. Diese ist in L^1 und daher können wir die Fourier-Transformation als Werkzeug benutzen.

3.1.1 Definition. *Sei $f \in L^1$, dann heißt die Funktion $\widehat{f} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definiert durch*

$$\widehat{f}(x) := \int\limits_{\mathbb{R}} e^{-itx} f(t)\, d\lambda(t)$$

die Fourier-Transformierte der Funktion f. Die Funktion $\check{f} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definiert durch

$$\check{f}(x) := \frac{1}{2\pi} \int\limits_{\mathbb{R}} e^{itx} f(t)\, d\lambda(t)$$

heißt inverse Fourier-Transformierte der Funktion f.

Eine Einführung in die Theorie der Fourier-Transformation findet man zum Beispiel in [23].

Die nächsten zwei Sätze sind nun sehr wichtig, denn auf die erhaltenen Resultate stützen sich einige spätere Resultate:

3.1.2 Satz. *Sei $f \in L^1(\mathbb{R})$ und $\widehat{f}$ die Fouriertransformierte von f. Dann löst f genau dann die Gleichung (1), wenn fast überall gilt:*

$$\widehat{f}(\frac{x}{q}) = \frac{1}{2}(1+\cos(x))\widehat{f}(x) = \cos^2(\frac{x}{2})\widehat{f}(x).$$

Beweis. Wir setzen für $x \in \mathbb{R}$:

$$g(x) := f(x+1) + f(x-1) + 2f(x) - 4qf(qx).$$

Damit gilt

$$\begin{aligned} \widehat{g}(x) &= e^{ix}\widehat{f}(x) + e^{-ix}\widehat{f}(x) + 2\widehat{f}(x) - 4q\frac{1}{q}\widehat{f}(\frac{x}{q}) = \\ &= \widehat{f}(x)(e^{ix} + e^{-ix} + 2) - 4\widehat{f}(\frac{x}{q}) = 2(\cos(x)+1)\widehat{f}(x) - 4\widehat{f}(\frac{x}{q}). \end{aligned}$$

Weiters ist g genau dann fast überall gleich 0, wenn $\widehat{g}$ gleich 0 ist und damit gilt:

$$\begin{aligned} 0 &= 2(\cos(x)+1)\widehat{f}(x) - 4\widehat{f}(\tfrac{x}{q}) \\ 4\widehat{f}(\tfrac{x}{q}) &= 2(\cos(x)+1)\widehat{f}(x) \\ \widehat{f}(\tfrac{x}{q}) &= \tfrac{1}{2}(1+\cos(x))\widehat{f}(x) = \cos^2(\tfrac{x}{2})\widehat{f}(x) \end{aligned}$$

und die Behauptung ist bewiesen. [3] bzw. [11] ☺

3.1.3 Satz. *Sei $f \in L^1$. Dann ist f genau dann eine L^1-Lösung von (1), wenn es ein $c \in \mathbb{R}$ gibt, so dass für alle $x \in \mathbb{R}$*

$$\widehat{f}(x) = c \cdot \underbrace{\prod_{k=1}^{\infty} \cos^2(\frac{q^k x}{2})}_{=: g_q(x)}$$

ist. Ist umgekehrt $g_q \in L^1$, dann ist $\check{g}_q$ eine stetige L^1-Lösung von (1) und $\frac{\check{g}_q}{\|\check{g}_q\|}$ die Schilling-Funktion zum Wert q.

Beweis. Sei $f \in L^1(\mathbb{R})$, dann löst nach 3.1.2 f genau dann (1), wenn fast überall

$$\widehat{f}(\frac{x}{q}) = \cos^2(\frac{x}{2})\widehat{f}(x)$$

ist. Setzen wir $y := \frac{x}{q}$, so gilt fast überall

$$\widehat{f}(y) = \widehat{f}(qy)\cos^2(\frac{qy}{2}).$$

Dieses Argument lässt sich wiederholt anwenden und so erhalten wir durch Iteration die Gleichung

$$\widehat{f}(y) = \widehat{f}(qy)\cos^2(\frac{qy}{2}) = \widehat{f}(q^2y)\cos^2(\frac{q^2y}{2})\cos^2(\frac{qy}{2}) = \ldots = \widehat{f}(0)\prod_{k=1}^{\infty}\cos^2(\frac{q^ky}{2}) = \widehat{f}(0)g_q(y).$$

Definieren wir also $c := \widehat{f}(0)$, so ist der erste Teil der Behauptung bewiesen.

Sei nun umgekehrt $g_q \in L^1$. Dann gilt (da $|g_q^2| < |g_q|$ ist) auch $g_q \in L^2$ und da g_q nach 3.1.4 von exponentiellem Typ ist, ist nach dem Satz von Paley-Wiener (siehe 5.2.2) g_q die Fouriertransformierte einer Funktion mit kompaktem Träger. Da also $\check{g}_q$ stetig auf ganz $\mathbb{R}$ ist und einen kompakten Träger hat ist somit $f := \check{g}_q \in L^1$. Weiters gilt $\widehat{f} = c \cdot g_q$ für ein $c \in \mathbb{R}$. Damit ist f nach 3.1.2 eine Lösung von (1) und die Behauptung ist bewiesen. [3] bzw. [11] ☺

(Der Satz von Paley-Wiener gibt sogar den kompakten Träger an und das Ergebnis von 2.1.10 lässt sich so noch einmal beweisen.)

Mit 3.1.3 haben wir eine Möglichkeit nach der Schilling-Funktion zu einem Wert q zu suchen. Ist nämlich $g_q \in L^1$, so ist die inverse Fourier-Transformierte eine Lösung von (1) und mit Normieren erhalten wir die Schilling-Funktion zum Wert q. noch stetig.

3.1.4 Hilfssatz. *Sei $0 < q < 1$ und $g_q(z) := \prod_{k=1}^{\infty}\cos^2(\frac{q^kz}{2})$ für $z \in \mathbb{C}$. Dann konvergiert das unendliche Produkt für alle $z \in \mathbb{C}$ und g_q ist ganz von exponentiellem Typ $\frac{q}{1-q} := Q$.*

Beweis. Wir untersuchen zuerst die Konvergenz von

$$g_q(z) = \prod_{k=1}^{\infty}\cos^2(\frac{q^kz}{2}) = \prod_{k=1}^{\infty}(1 - \sin^2(\frac{q^kz}{2})).$$

Sei dazu $z = a + ib \in \mathbb{C}$ und U eine beschränkte Umgebung von z. Es gilt:

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{\infty}\sup_{z\in U}|\sin^2(\frac{q^kz}{2})| &= \sum_{k=1}^{\infty}\sup_{z\in U}(|\sin(\frac{q^kz}{2})|^2) = \\
&= \sum_{k=1}^{\infty}\sup_{z\in U}(|\sin(\frac{q^ka}{2})\cosh(\frac{q^kb}{2}) + i\cos(\frac{q^ka}{2})\sinh(\frac{q^kb}{2})|^2) = \\
&= \sum_{k=1}^{\infty}\sup_{z\in U}(\sin^2(\frac{q^ka}{2})\cosh^2(\frac{q^kb}{2}) + \cos^2(\frac{q^ka}{2})\sinh^2(\frac{q^kb}{2})) \overset{\text{für großes } N}{\leq} \\
&\overset{C\in\mathbb{R}}{\leq} C + \sum_{k=N}^{\infty}\sup_{z\in U}(\frac{q^ka}{2}^2 \cdot 2 + 1 \cdot 2\frac{q^kb}{2}^2) \leq \\
&\leq C + \sum_{k=N}^{\infty} 3\max_{z\in U}(a^2, b^2)q^{2k} < \infty.
\end{aligned}$$

Damit konvergiert das Produkt nach 5.1.2 normal in $\mathbb{C}$. Speziell existiert $g_q(z)$ für alle $z \in \mathbb{C}$. Weiters folgt aus dem Weierstraß'schem Konvergenzsatz 5.1.3, dass g_q ganz ist, da $\sin^2$ ganz ist.

Sei nun wieder $z = a + ib \in \mathbb{C}$, dann gilt:

$$|\cos^2(\frac{q^k z}{2})| = |\cosh^2(\frac{q^k}{2})| = |\frac{1}{4}(e^{i\frac{q^k}{2}} + e^{-i\frac{q^k}{2}})^2| = |\frac{1}{4}(e^{iq^k z} + e^{-iq^k z} + 2)| =$$
$$= |\frac{1}{2} + \frac{1}{4}(e^{iq^k a}e^{-q^k b} + e^{-iq^k a}e^{q^k b})| \leq \frac{1}{2} + \frac{1}{4}(e^{-q^k b} + e^{q^k b}) \leq \frac{1}{2} + \frac{1}{4}(e^{q^k b} + e^{q^k b}) \leq e^{q^k b}.$$

Und damit:

$$|\prod_{k=1}^{\infty} \cos^2(\frac{q^k z}{2})| \leq \prod_{k=1}^{\infty} e^{q^k b} = e^{\sum_{k=1}^{\infty} q^k b} = e^{b\frac{q}{1-q}} = e^{bQ} \leq e^{Q \cdot |z|}.$$

☺

Wie bereits erwähnt, ist das unendliche Produkt $g_q = g$ auch im Weiteren noch von Bedeutung. Erfreulicherweise ist einiges über diese Produkt bzw. über das Produkt

$$\gamma_q(x) = \gamma(x) := \prod_{k=0}^{\infty} \cos(\pi q^k x)$$

bekannt. Doch viele Ergebnisse wurden nicht durch Arbeiten zur Schilling'schen Funktionalgleichung, sondern auf einem ganz anderen Gebiet erzielt. Dieses soll nun im nächsten Abschnitt kurz vorgestellt werden.

3.2 Unendliche Bernoulli-Faltungen

In diesem Abschnitt soll ein Gebiet vorgestellt werden, das wesentliche Ergebnisse auf der Suche nach Schilling-Funktionen lieferte. (Für Einführungen siehe etwa auch [19], [36]).

Sei A die Verteilungsfunktion einer Zufallsvariable, die mit gleicher Wahrscheinlichkeit die Werte $-1, +1$ annimmt, also:

$$A(x) := \begin{cases} 0 & x < -1 \\ \frac{1}{2} & -1 \leq x < 1 \\ 1 & 1 \leq x \end{cases}.$$

Sei weiters $r := (r_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Folge positiver, reeller Zahlen und für $n \in \mathbb{N}$ seien die Funktionen $A_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definiert durch:

$$A_n(x) := A(\frac{x}{r_n}).$$

Jessen und Wintner zeigten in [25], dass das unendliche Faltungs-Produkt

$$\nu(x, r) := A_0(x) * A_1(x) * A_2(x) * \dots$$

(auch als Bernoulli-Faltung bekannt) genau dann zu einer Verteilungs-Funktion konvergiert, wenn

$$\sum_{n=0}^{\infty} r_n^2 < \infty$$

ist. Dann kann auch gezeigt werden, dass ν stetig und entweder absolut stetig oder singulär ist (siehe [25]). Für welche Folgen r ist nun ν absolut stetig, für welche singulär?

Diese Frage wurde seit 1935 intensiv untersucht. Dabei wurden aber auch weitere Einschränkungen getroffen. So zum Beispiel wurden vor allem Folgen betrachtet, für die gilt:

$$\sum_{n=0}^{\infty} r_n < \infty.$$

Unter dieser Voraussetzung kann man auch ohne Beschränkung der Allgemeinheit annehmen, dass $\sum r_n = 1$ ist und die Funktion ν erhält eine interessante wahrscheinlichkeitstheoretische Interpretation. Wir definieren folgenden Zufallsweg:

Sei $x_{-1} := 0$ und für $n \geq 0$ lassen wir x_n mit gleicher Wahrscheinlichkeit bei x_{n-1} stehen oder zum Punkt $x_{n-1} + r_n$ gehen. Es gilt also für $n \geq 0$

$$x_n = \sum_{k=0}^{n} a_k r_n,$$

wobei a_k mit gleicher Wahrscheinlichkeit den Wert 0 oder 1 annimmt. Setzten wir nun

$$a_k = \frac{1 + \omega_k}{2},$$

so sind die ω_k Zufallsvariablen, die mit gleicher Wahrscheinlichkeit den Wert -1 oder $+1$ annehmen. Seien

$$S_n := \sum_{k=0}^{n} \omega_k r_k, \quad S := \sum_{k=0}^{\infty} \omega_k r_k, \quad \nu_n(x, r) := P\{S_n \leq x\},$$

(wobei P die Wahrscheinlichkeit bezeichnet) so erhalten wir

$$x_n = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{n} r_k + \frac{1}{2} S_n$$

und

$$\nu_n(x, r) \longrightarrow \nu(x, r).$$

Oder anders ausgedrückt:

$$\nu(x, r) = P\{S \leq x\}.$$

Auch beschränken sich viele Untersuchungen auf die speziellen Folgen:

$$(r_n)_{n \in \mathbb{N}} = (q^n)_{n \in \mathbb{N}} \quad \text{für} \quad q \in]0, 1[.$$

In diesem Fall wollen wir $\nu_q := \nu(-, r)$ setzen.

Es tauchten überraschende Verbindungen zur harmonischen Analysis, zur Theorie algebraischer Zahlen, zu dynamischen Systemen und zu Abschätzungen der Hausdorff-Dimension auf.

Die am meisten untersuchte Frage dreht sich wie gesagt darum, für welche $q \in]0, 1[$ das Maß ν_q oder ähnliche Maße absolut stetig sind. Es wurden verschiedene Wege beschritten um diese Frage zu klären:

(i) Die Fourier-Transformierte von ν_q ist gegeben durch:

$$\widehat{\nu}_q(x) = \int_{\mathbb{R}} e^{-itx} \, d\nu_q(t) = \prod_{n=0}^{\infty} \cos(q^n x)$$

(siehe etwa [36]). Dieses Produkt wurde wie gesagt intensiv untersucht und einige Ergebnisse lassen sich auch für die Schilling'sche Funktionalgleichung verwenden, da ja, wie gezeigt (siehe 3.1), die Fourier-Transformierte einer ihrer L^1-Lösungen ein sehr ähnliches Produkt liefert.

Es zeigte sich zum Beispiel, dass gewisse algebraische Zahlen einen großen Einfluss auf die Existenz der Schilling-Funktion für einen Wert q haben. Diese Zahlen werden genauer in 4.1 vorgestellt.

(ii) Das Maß ν_q kann als „nicht-lineare Projektion" dargestellt werden (siehe [38]): Sei $\Omega = \{-1, 1\}^{\mathbb{N}}$ der Folgenraum mit dem Bernoulli-Maß $\mu = (\frac{1}{2}, \frac{1}{2})^{\mathbb{N}}$. Dann ist

$$\nu_q = \mu \circ \Pi_q^{-1} \quad \text{mit} \quad \Pi_q(\omega) = \sum_{n=0}^{\infty} \omega q^n.$$

Diese Darstellung hat sich als sehr nützlich erwiesen und hat zu den neuesten Ergebnissen über ν_q geführt (siehe 4.2).

(iii) Das Maß ν_q kann auch über die Funktionalgleichung ihrer Verteilungs-Funktion charakterisiert werden (siehe [7]):

Sei $q \in]0, 1[, b \in \mathbb{N}, b \geq 2$ und $-1 = \beta_0 \leq \beta_1 \leq \ldots \leq \beta_{b-1} = 1$. Mit dem Banach'schen Fixpunktsatz kann gezeigt werden, dass das folgende System von b Funktionalgleichungen eine eindeutige Lösung in $L^1[0, 1]$ besitzt:

$$\begin{aligned} s(\frac{x}{b}) &= qs(x) + \beta_0 \\ &\vdots \\ s(\frac{x+n}{b}) &= qs(x) + \beta_n \\ &\vdots \\ s(\frac{x+b-1}{b}) &= qs(x) + \beta_{b-1} \end{aligned}$$

Das bedeutet, dass es eine Funktion S gibt, die das System fast überall erfüllt und dass jeweils zwei solche Funktionen fast überall übereinstimmen. Wendet man die Gleichungen wiederholt auf sich selbst an, so sieht man, dass die Lösung als Zufallsreihe

$$S = \sum_{k=0}^{\infty} \omega_k q^k$$

interpretiert werden kann, wobei die unabhängigen Zufallsvariablen ω_k die Bedingung

$$P(\omega_k) = \frac{1}{b}$$

erfüllen. Wir definieren die Verteilungsfunktion ν von s durch:

$$\nu(x) := \lambda\{t \in [0, 1] \, : \, s(t) \leq x\}.$$

Da nun die Zufallsreihe S die Lösung eines recht einfachen Systems von Funktionalgleichungen ist, mag es nicht überraschen, dass ν eine interessante Funktionalgleichung erfüllt:

3.2.1 Satz. *Die Verteilungsfunktion ν erfüllt für alle $x \in \mathbb{R}$ die Funktionalgleichung:*

$$\nu(x) = \frac{1}{b} \sum_{n=0}^{b-1} \nu(\frac{x - \beta_n}{q}).$$

Beweis. Sei $M(x) := \{t \in [0,1] : s(t) \leq x\}$. Dann ist $\nu(x) = \lambda(M(x))$.

Für $n = 0, 1, \ldots, b-1$ sei $J_n := [\frac{n}{b}, \frac{n+1}{b}]$. Es folgt:

$$\begin{aligned} t \in J_n \cap M(x) &\Leftrightarrow t \in J_n \quad \text{und} \quad s(t) \leq x \\ &\Leftrightarrow t \in J_n \quad \text{und} \quad qs(bt-n) + \beta_n \leq x \\ &\Leftrightarrow t \in J_n \quad \text{und} \quad bt - n \in M(\frac{x-\beta_n}{q}) \\ &\Leftrightarrow t \in \frac{1}{b}\left(M(\frac{x-\beta_n}{q}) + n\right), \end{aligned}$$

da die letzte Menge in J_n enthalten ist. Damit erhalten wir:

$$\begin{aligned} \nu(x) = \lambda(M(x)) = \lambda\left(\bigcup_{n=0}^{b-1}(J_n \cap M(x))\right) = \lambda\left(\bigcup_{n=0}^{b-1}\frac{1}{b}(M(\frac{x-\beta_n}{q}) + n)\right) = \\ = \sum_{n=0}^{b-1}\lambda\left(\frac{1}{b}(M(\frac{x-\beta_n}{q}) + n)\right) = \sum_{n=0}^{b-1}\frac{1}{b}\lambda\left(M(\frac{x-\beta_n}{q})\right) = \frac{1}{b}\sum_{n=0}^{b-1}\nu(\frac{x-\beta_n}{q}). \end{aligned}$$

[7] ☺

Damit lässt sich für die Zufallsreihe $\sum_{n=0}^{\infty} \pm q^n$ die zugehörige Verteilungsfunktion ν durch folgende Funktionalgleichung charakterisieren:

$$\nu(x) = \frac{1}{2}(\nu(\frac{x+1}{q}) + \nu(\frac{x-1}{q})).$$

In Hinblick darauf, für einen Wert q die Schilling-Funktion zu finden, liefert nicht nur (i) in Verbindung mit 3.1 einige Ergebnisse. Mit (ii) wurden sehr wichtige Ergebnisse zur absoluten Stetigkeit erzielt (siehe 4.2), die sich durch (iii) auch für die Schilling'sche Funktionalgleichung einsetzen lassen. Dabei lässt sich zwar auch die Zufallsreihe $\sum_{n=0}^{\infty} \pm q^n$ einsetzen (siehe [7]), jedoch erzielt man mit einer ähnlichen Zufallsreihe noch bessere Resultate, wie der folgende Satz zeigt:

3.2.2 Satz. *Wir betrachten die Zufallsreihe*

$$S := \sum_{k=0}^{\infty} d_k q^k$$

mit $q \in]0,1[$ *und* $d_k \in \{-1, 0, 1\}$, *wobei gilt:*

$$P(d_k = -1) = P(d_k = 1) = \frac{1}{4} \quad \textit{und} \quad P(d_k = 0) = \frac{1}{2}.$$

Ist die Verteilungsfunktion ν von S für den Wert q absolut stetig, so existiert auch die Schilling-Funktion zum Wert q.

Beweis. Wir verwenden das System von Funktionalgleichungen von (iii) mit

$$b = 4, \beta_0 = -1, \beta_1 = \beta_2 = 0 \text{ und } \beta_3 = 1.$$

Dann erfüllt nach 3.2.1 die Verteilungsfunktion ν die Funktionalgleichung:

$$\nu(x) = \frac{1}{4}\left(\nu(\frac{x+1}{q}) + 2\nu(\frac{x}{q}) + \nu(\frac{x-1}{q})\right).$$

Ist diese Funktion absolut stetig, so existiert ein $\nu' \in L^1$, das folgende Funktionalgleichung erfüllt:

$$\nu'(x) = \frac{1}{4q}\left(\nu'(\frac{x+1}{q}) + 2\nu'(\frac{x}{q}) + \nu'(\frac{x-1}{q})\right).$$

Wir definieren eine Funktion f durch:

$$f(x) := \nu'(\frac{x}{q}).$$

Dann gilt:

$$\begin{aligned} f(qx) &= \nu'(x) = \\ &= \frac{1}{4q}\left(\nu'(\frac{x+1}{q}) + 2\nu'(\frac{x}{q}) + \nu'(\frac{x-1}{q})\right) \\ &= \frac{1}{4q}\left(f(x+1) + 2f(x) + f(x-1)\right). \end{aligned}$$

Die Funktion f erfüllt somit die Schilling'sche Funktionalgleichung und somit gibt es die Schilling-Funktion zum Wert q. [7],[38] ☺

Aus der absoluten Stetigkeit der Verteilungfunktion einer Zufallsreihe folgt also die Existenz einer Schilling-Funktion. Doch wie verhält es sich umgekehrt? Folgt aus der Existenz der Schilling-Funktion für einen Wert q, dass dann die Verteilungsfunktion der zugehörigen Zufallsreihe absolut stetig ist? Dies ist immer noch eine offene Frage.

4 Lösungen

4.1 Nulllösungen

Es ist klar, dass eine Funktion, die fast überall gleich 0 ist, eine L^1-Lösung der Schilling'schen Funktionalgleichung ist. Solche triviale Lösungen gibt es also für jedes $q \in]0,1[$. Dieser Abschnitt beschäftigt sich nun damit, unter welchen Bedingungen eine L^1-Lösung die Nulllösung sein muss, unter welchen Bedingungen es also keine Schilling-Funktion zu einem Wert q gibt.

4.1.1 Satz. *Sei f eine L^1-Lösung von (1) mit $\int_{\mathbb{R}} f\, d\lambda = 0$. Dann ist $f = 0$ fast überall.*

Beweis. Wir verwenden die Funktion F aus 2.1.5. Damit ist F stetig und es gilt:

$$\lim_{x\to-\infty} F(x) = 0 = \lim_{x\to\infty} F(x).$$

Weiters für alle $x \in \mathbb{R}$:

$$F(qx) = \frac{1}{4}F(x+1) + F(x-1) + 2F(x).$$

Da F stetig ist und für x gegen $\pm\infty$ gegen 0 geht, gibt es ein $x_0 \in \mathbb{R}$, so dass $F(x_0) =: M$ maximal ist. Setzen wir nun $x_0 = qy_0$, dann gilt:

$$M = F(x_0) = F(qy_0) = \frac{1}{4}(F(y_0+1) + F(y_0-1) + 2F(y_0)).$$

Aufgrund der Maximalität von M folgt, dass

$$F(y_0+1) = F(y_0-1) = F(y_0) = F(qy_0) = F(x_0) = M$$

ist und wir unterscheiden zwei Fälle:

Fall 1: Sei $x_0 \neq 0$. Wir definieren eine Folge $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ durch $z_0 := x_0$ und $z_{n+1} := qz_n$ für $n \in \mathbb{N}$. Damit ist $y_0 = z_1$ und durch Induktion mit Hilfe des obigen Arguments erhalten wir, dass die Folge $(F(z_n))_{n\in\mathbb{N}}$ konstant mit Wert M ist. Da nun aber $\lim_{n\to\infty} z_n = \pm\infty$ ist, muss $M = 0$ gelten.

Fall 2: Sei $x_0 = 0$. Die obige Rechnung zeigt, dass dann $F(1) = M$ ist und wir können $x_0 = 1$ setzen und wie im Fall 1 vorgehen.

Somit erhalten wir in jedem Fall $M = 0$, womit $F = 0$ sein muss. Schließlich folgt daraus, dass f fast überall gleich 0 ist. [17] bzw. [2] ☺

Mit Hilfe dieses Satzes lässt sich ebenfalls die Eindeutigkeit einer nichttrivialen L^1-Lösung beweisen:

Beweis. Seien f_1, f_2 zwei nichttriviale L^1-Lösungen der Schilling'schen Funktionalgleichung zum Wert q. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit können wir annehmen, dass gilt

$$\int\limits_{\mathbb{R}} f_1(x)\,d\lambda(x) = 1$$

(sonst betrachten wir $\frac{1}{d}f_1$ mit $d := \int_{\mathbb{R}} f_1(x)\,d\lambda(x)$). Wir setzen weiters

$$c := \int\limits_{\mathbb{R}} f_2(x)\,d\lambda(x).$$

Damit ist dann $f := f_2 - c\cdot f_1$ ebenfalls eine Lösung und es gilt $\int_{\mathbb{R}} f(x)\,d\lambda(x) = 0$. Nach 4.1.1 ist dann aber $f = 0$ und damit $f_2 = c\cdot f_1$. [2] ☺

4.1.2 Satz. *Sei f eine L^1-Lösung von (1). Ist f stetig in 0 und ist $f(0) = 0$, so ist $f = 0$.*

Beweis. Angenommen f ist ungleich 0. Nach 3.1.3 gibt es dann ein $c \in \mathbb{R}$, so dass $\widehat{f} = c\cdot g_q$ ist. Also ist $\widehat{f}$ gerade und größergleich 0 (bzw. kleinergleich 0). Weiters ist $f \in L^1(\mathbb{R})$ und stetig in 0. Nach 5.2.3 gilt damit, dass $\widehat{f} \in L^1(\mathbb{R})$ ist und dass für alle $t \in \mathbb{R}$

$$f(t) = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{\mathbb{R}} \widehat{f}(x)e^{itx}\,d\lambda(x)$$

ist. Damit ist aber auch f gerade, denn für alle $t \in \mathbb{R}$ gilt:

$$f(-t) = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{\mathbb{R}} \widehat{f}(x)e^{-itx}\,d\lambda(x) = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{\mathbb{R}} \widehat{f}(-x)e^{itx}\,d\lambda(x) = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{\mathbb{R}} \widehat{f}(x)e^{itx}\,d\lambda(x) = f(t).$$

Nach 5.2.6 und da f gerade ist (siehe 5.2.5), gilt für die Fourierreihe (siehe 5.2.4) von f im Intervall $[-Q, Q]$

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(\frac{n\pi x}{Q}),$$

wobei für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt:

$$\begin{aligned}
a_n &:= \frac{1}{Q} \int\limits_{[-Q,Q]} \widehat{f}(x) \cos(\frac{n\pi x}{Q})\, d\lambda(x) = \frac{1}{Q} \int\limits_{\mathbb{R}} \widehat{f}(x) \cos(\frac{n\pi x}{Q})\, d\lambda(x) = \\
&= \frac{1}{Q}(\int\limits_{\mathbb{R}} \widehat{f}(x) \cos(\frac{n\pi x}{Q})\, d\lambda(x) + \underbrace{i \int\limits_{\mathbb{R}} \widehat{f}(x) \sin(\frac{n\pi x}{Q})\, d\lambda(x)}_{=0 \quad \text{da } f \text{ gerade, sin ungerade}}) = \\
&= \frac{1}{Q}(\int\limits_{\mathbb{R}} \widehat{f}(x) e^{-i\frac{n\pi x}{Q}}\, d\lambda(x) = \\
&= \frac{c}{Q} g_q(\frac{n\pi}{Q}).
\end{aligned}$$

Damit ist speziell $a_0 = g_q(0) > 0$ und $a_n \geq 0$ für alle $n \geq 1$. Schließlich folgt:

$$0 = f(0) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(0 \cdot \frac{n\pi}{Q}) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \geq \frac{a_0}{2} > 0.$$

Dies ist natürlich ein Widerspruch, also muss f gleich 0 sein. [3] ☺

4.1.3 Satz. *Sei $q = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$ ($\frac{1}{q} = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ ist bekannt als „Goldener Schnitt“) und f eine L^1-Lösung von (1). Ist f weiters stetig in 0, dann ist $f = 0$. Für $q = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$ gibt es also keine Schilling-Funktion, die in 0 stetig ist.*

Beweis. Da $q = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$ ist, gilt

$$Q = \frac{q}{1-q} = \frac{\frac{\sqrt{5}-1}{2}}{1 - \frac{\sqrt{5}-1}{2}} = \frac{\sqrt{5}-1}{2} \cdot \frac{2}{3-\sqrt{5}} \cdot \frac{3+\sqrt{5}}{3+\sqrt{5}} = \frac{\sqrt{5}+1}{2}.$$

Setzen wir nun

$$x = \pm\frac{1}{1-q} = \pm\frac{2}{3-\sqrt{5}} = \pm\frac{3+\sqrt{5}}{2}$$

in (1) ein, so erhalten wir

$$\begin{aligned}
f(\pm q \cdot \frac{1}{1-q}) &= f(\pm Q) = \\
&= \frac{1}{4q}(f(\underbrace{\pm\frac{3+\sqrt{5}}{2}+1}_{>Q \text{bzw.} <Q}) + f(\underbrace{\pm\frac{3+\sqrt{5}}{2}-1}_{=\pm Q}) + 2f(\underbrace{\pm\frac{3+\sqrt{5}}{2}}_{>Q \text{bzw.} <Q})) = \\
&= \frac{1}{4q} f(\pm Q)
\end{aligned}$$

und daraus folgt, dass $f(\pm Q) = 0$ ist.

Weiters beachten wir, dass

$$q + 1 = \frac{\sqrt{5}-1}{2} + 1 = \frac{\sqrt{5}+1}{2} = Q \quad \text{und} \quad qQ = \frac{\sqrt{5}-1}{2} \cdot \frac{\sqrt{5}+1}{2} = 1$$

ist. Setzen wir nun für x die fünf Werte $0, \pm 1, \pm Q$ in (1) ein, so erhalten wir folgende Gleichungen:

$$
\begin{aligned}
x = 0: \quad & f(0) = \frac{1}{4q}(f(1) + f(-1) + 2f(0)) \\
x = 1: \quad & f(q) = \frac{1}{4q}(f(2) + f(0) + 2f(1)) = \frac{1}{4q}(f(0) + 2f(1)) \\
x = -1: \quad & f(-q) = \frac{1}{4q}(f(0) + f(2) + 2f(-1)) = \frac{1}{4q}(f(0) + 2f(-1)) \\
x = Q: \quad & f(qQ) = f(1) = \frac{1}{4q}(f(Q+1) + f(Q-1) + 2f(Q)) = \frac{1}{4q}f(q) \\
x = -Q: \quad & f(-qQ) = f(-1) = \frac{1}{4q}(f(-Q+1) + f(-Q-1) + 2f(-Q)) = \frac{1}{4q}f(-q).
\end{aligned}
$$

Dieses lineare Gleichungssystem mit fünf Gleichungen und den fünf Unbekannten $f(-1)$, $f(-q)$, 0, $f(q)$ und $f(1)$ (beachte: $f(2) = 0$) ist eindeutig lösbar und wir erhalten:

$$f(-1) = f(-q) = f(0) = f(q) = f(1) = 0.$$

Speziell ist also $f(0) = 0$. Da nach Voraussetzung f in 0 auch noch stetig ist, folgt mit 4.1.2, dass $f = 0$ ist. [3] ☺

Der letzte Satz zeigt uns also, wenn q den speziellen Wert des reziproken Goldenen Schnittes annimmt und die Lösung in 0 stetig ist, dass es dann nur die Nulllösung geben kann. Wir werden gleich sehen, dass die Stetigkeit in 0 gar nicht gefordert werden muss, sondern dass es für das Reziproke des Goldenen Schnittes keine L^1-Lösung außer der Nulllösung gibt. Dasselbe gilt auch für andere algebraische Zahlen, den sogenannten P.V.-Zahlen (außer der 2). Diese sollen nun vorgestellt werden.

4.1.4 Definition. *Sei P ein irreduzibles Polynom mit ganzzahligen Koeffizienten und Leitkoeffizient 1. Seien weiters $a = a_1 \in \mathbb{R}, a_2 \ldots, a_m \in \mathbb{C}$ die Nullstellen von P.*

1. *Ist $a > 1, |a_j| < 1$ für $j = 2, \ldots, m$, so heißt a eine Pisot-Vijayaraghavan-Zahl (P.V.-Zahl). Die Menge aller P.V.-Zahlen bezeichnen wir mit S. (Achtung: diese Definition wird im Folgenden noch etwas ergänzt.)*

2. *Ist $a > 1, |a_j| \leq 1$ für $j = 2, \ldots, m$ und gibt es mindestens ein $j \in \{2, \ldots, m\}$ so, dass $|a_j| = 1$ ist, so heißt a eine Salem-Zahl. Die Menge aller Salem-Zahlen bezeichnen wir mit T.*

Obwohl die Entdeckung der P.V.-Zahlen auf A. Thue und dann G. H. Hardy zurückgeht, war es Pisots Ergebnis seiner Arbeit von 1938 (siehe [40]) das eine Brücke zur harmonischen Analysis schlug, wie Raphael Salem in seinen Arbeiten um 1940 zeigte, und somit ins Rampenlicht der allgemeinen mathematischen Aufmerksamkeit stellte. Da aber auch Vijayaraghavan sich um diese Zahlen verdient gemacht hat, heißen sie heute Pisot-Vijayaraghavan-Zahlen.

Nun einige Beispiele für P.V.-Zahlen (siehe dazu etwa [4]). Betrachten wir das Polynom $X^2 - X - 1$ mit den Nullstellen $X_{1,2} = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$. Die Zahl $\frac{1+\sqrt{5}}{2} = 1,61803\ldots > 1$ ist als „Goldener Schnitt" bekannt. Da er größer als 1 ist und die andere Nullstelle des Polynoms $|\frac{1-\sqrt{5}}{2}| = 0,61803\ldots < 1$ ist, folgt aufgrund der Definition, dass der „Goldene Schnitt" eine

P.V.-Zahl ist. Allgemeiner liefern alle Polynome zweiten Grades mit ganzzahligen Koeffizienten p_0, p_1 der Form $X^2 + p_1X + p_0$ P.V.-Zahlen, falls $p_1 + |1 + p_0| < 0$ ist. Und nocheinmal allgemeiner liefern Polynome der Form

$$X^m + p_{m-1}X^{m-1} + \ldots + p_0$$

P.V.-Zahlen, wenn deren ganzzahlige Koeffizienten die Bedingungen

$$1 + \sum_{i=0}^{m-1} p_i < 0 \text{ und } |p_{m-1}| > 1 + \sum_{i=0}^{m-2} |p_i|$$

erfüllen. Ist weiters a eine P.V.-Zahl, so auch $a^n, n \in \mathbb{N}$.

Auch über die Menge S ist einiges bekannt. (Die Menge wurde in den ersten Arbeiten über sie bereits mit S bezeichnet und diese Notation hat sich bis heute nicht geändert. Ebenso verhält es sich mit der Menge T der Salem-Zahlen.) Es war eine große Überraschung, als Salem zeigte, dass S abgeschlossen ist. Damit besitzt jedoch S ein kleinstes Element, also gibt es eine kleinste P.V.-Zahl a. Diese ist die postive Nullstelle der Gleichung $X^3 - X - 1 = 0$ und ungefähr $a = 1,324\ldots$.

Nach der obigen Definition gibt es keine rationalen P.V.-Zahlen, da ja rationale Zahlen Minimalpolynome vom Grad 1 haben und damit nicht die Bedingungen der Defintion erfüllen können. Doch gewisse Eigenschaften der P.V.-Zahlen führen dazu, natürliche Zahlen größer als 1 sehr wohl noch zur Menge S hinzuzunehmen. Um dies zu verdeutlichen ein wenig Notation wie sie auf dem Gebiet der P.V. und Salem-Zahlen gebräuchlich ist:

Jede reelle Zahl $x \in \mathbb{R}$ kann in eindeutiger Weise geschrieben werden als

$$x = E(x) + \varepsilon(x),$$

wobei

$$E(x) \in \mathbb{Z} \text{ und } \varepsilon(x) \in [-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}[$$

ist. Man sagt $\varepsilon(x)$ ist der Rest von x modulo 1. Wir wählen das Intervall $[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}[$ statt dem Intervall $[0, 1[$, weil dann $||x|| := |\varepsilon(x)|$ den Abstand von x zu $\mathbb{Z}$ repräsentiert.

Betrachten wir nun als Beispiel den Goldenen Schnitt $\tau := \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ und dessen Komplement $\varrho := \frac{1-\sqrt{5}}{2}$. Da $\tau^n + \varrho^n \in \mathbb{Z}$ für alle $n \in \mathbb{N}$ ist, gilt damit $\varepsilon(\tau^n) = \varrho^n$ und da $|\varrho| < 1$ ist, sehen wir, dass $\lim_{n\to\infty} \varepsilon(\tau^n) = 0$ ist. Wir sagen die Folge $(\tau^n)_{n\in\mathbb{N}}$ geht gegen 0 modulo eins.Diese Eigenschaft haben aber nicht nur die wie oben definierten P.V.-Zahlen, sondern auch die natürlichen Zahlen. Dies ist der Grund auch noch die natürlichen Zahlen größer 1 zu den P.V.-Zahlen hinzuzunehmen. Damit gilt dann auch folgender Satz zu dem Vijayaraghavans Arbeiten [47], [48] führen:

4.1.5 Satz. *Eine reelle Zahl $a > 1$ ist genau dann eine P.V.-Zahl, wenn es eine reelle Zahl $\mu \neq 0$ gibt, sodass die Folge $(\mu a^n)_{n\in\mathbb{N}}$ nur endlich viele Häufungspunkte modulo 1 hat (also die Folge $(\varepsilon(\mu a^n))_{n\in\mathbb{N}}$).*

Beweis. Siehe dazu etwa [4]. ☺

(Es ist noch zu bemerken, dass rationale Zahlen der Form $\frac{p}{q}$ mit $p, q \in \mathbb{N}$, $ggT(p, q) = 1$ und $p > q > 1$ die Eigenschaft des obigen Satzes nicht erfüllen. Damit besteht kein Anlass noch weitere rationale Zahlen, außer den natürlichen, zu den P.V.-Zahlen hinzuzunehmen.)

Aus Pisot's Arbeit von 1938 lässt sich schließlich folgender Satz ableiten, der als Pisot'scher Satz bekannt ist (siehe z.B. [43]).

4.1.6 Satz. *Eine reelle Zahl $a > 1$ ist genau dann eine P.V.-Zahl, wenn es eine reelle Zahl $\mu \neq 0$ gibt, sodass die Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} \sin^2(\pi\mu a^n)$ konvergiert.*

Beweis. Siehe dazu etwa [40], [43], [4]. ☺

In einer seiner Arbeiten über P.V.-Zahlen führte Salem auch die heute nach ihm benannten Zahlen ein. Zur Charakterisierung von Salem-Zahlen sei folgender Satz zitiert:

4.1.7 Satz. *Ist a eine Salem-Zahl und $\eta \in \mathbb{R}, 0 < \eta < \frac{1}{2}$, dann gibt es eine reelle Zahl $\mu \neq 0$, so dass für alle $n \geq n_0$ gilt $|\sin(\mu a^n)| < \eta$.*

Beweis. Siehe dazu etwa [4]. ☺

Für Salem-Zahlen gibt es keine so einfachen Beispiele wie für P.V.-Zahlen, da es keine Salem-Zahl mit Grad kleiner als 4 gibt. Die Polynome

$$X^4 + p_1 X^3 + p_2 X^2 + p_1 X + 1$$

liefern etwa Salem-Zahlen, falls für $p_1, p_2 \in \mathbb{Z}$ die Ungleichung

$$2(p_1 - 1) < p_2 < -2(p_1 + 1)$$

gilt.

Auch über die Menge T ist im Vergleich zur Menge S wenig bekannt. Man weiß jedoch, dass $S \subseteq \overline{T}$ und die kleinste Salem-Zahl eine Nullstelle des Polynoms $X^4 - X^3 - X^2 - X + 1$ ist.

Wer noch mehr und genaueres über diese bemerkenswerte Klasse von Zahlen wissen möchte, dem empfehle ich die Lektüre von [4], wo man auch Verweise auf die Originalarbeiten findet.

In welchem Zusammenhang nun P.V. und Salem-Zahlen mit der Schilling'schen Funktionalgleichung stehen, werden wir gleich untersuchen. Zuvor jedoch noch einige Feststellungen über unendliche Produkte (siehe dazu auch [42]).

4.1.8 Definition. *Sei $k \in \mathbb{N}$ und $(a_n)_{n \geq k}$ eine Folge komplexer Zahlen. Die Folge der Partialprodukte*

$$\left(\prod_{l=k}^{n} a_l\right)_{n \geq k}$$

heißt ein (unendliches) Produkt mit den Faktoren a_l. Man schreibt

$$\prod_{l=k}^{\infty} a_l \text{ oder } \prod_{l \geq k} a_l \text{ oder } \prod a_l.$$

Im Allgemeinen ist $k = 0$ oder $k = 1$.

Würde man nun – analog wie bei Reihen – ein Produkt $\prod a_l$ konvergent nennen, wenn die Folge der Partialprodukte einen Grenzwert a hat, so ergäben sich unerwünschte Pathologien: Zum einen wäre ein Produkt bereits konvergent mit Wert 0, wenn nur ein einziges Folgenglied Null wäre. Zum anderen könnte $\prod a_l$ Null werden auch dann, wenn kein einziger Faktor Null ist (zum Beispiel wenn $0 < a_l \leq x < 1$ gilt). Man wird also Vorsichtsmaßnahmen gegen Nullfaktoren und Nullkonvergenz treffen.

4.1.9 Definition. *Sei $k \in \mathbb{N}$ und $(a_n)_{n\geq k}$ eine Folge komplexer Zahlen. Sei für $k \leq m \leq n$:*

$$p_{m,n} := a_m a_{m+1} \cdots a_n = \prod_{l=m}^{n} a_l.$$

Das Produkt $\prod_{l=k}^{\infty} a_l$ heißt konvergent, wenn es einen Index $m \in \mathbb{N}$ gibt, so dass die Folge

$$(p_{m,n})_{n\geq m}$$

für $n \to \infty$ einen Grenzwert $\overline{a_m} \neq 0$ hat. Man nennt dann

$$a := a_k \cdots a_{m-1}\overline{a_m}$$

den Wert des Produktes und schreibt suggestiv:

$$\prod_{l=k}^{\infty} a_l := a_k \cdots a_{m-1}\overline{a_m} = a.$$

Nicht konvergente Produkte heißen divergent.

4.1.10 Bemerkung. *Die Zahl a ist unabhängig vom Index m, denn: Wegen $\overline{a_m} \neq 0$ gilt $a_n \neq 0$ für alle $n \geq m$. Daher hat auch für jedes feste $j > m$ die Folge $(p_{j,n})_{n\geq j}$ für $n \to \infty$ einen Grenzwert $\overline{a_j} \neq 0$, und es gilt:*

$$a = a_k \cdots a_{j-1}\overline{a_j}.$$

4.1.11 Bemerkung. *Für ein Produkt $\prod_{l=0}^{\infty} a_l$ und $k > 0$ gilt:*

$$\prod_{l=0}^{\infty} a_l = \prod_{l=k}^{\infty} a_{l-k}.$$

Daher gelten alle Aussagen für Produkte mit $k = 0$ auch für Produkte mit $k > 0$.

4.1.12 Satz. *Ein Produkt $\prod_{l=0}^{\infty} a_l$ ist genau dann konvergent, wenn höchstens endlich viele Faktoren Null sind, und wenn die mit allen von Null verschiedenen Gliedern gebildete Partialproduktfolge einen Grenzwert ungleich Null hat.*

Beweis. 1) Wir nehmen an, dass $\prod_{l=k}^{\infty} a_l$ konvergent ist. Dann gibt es einen Index $m \in \mathbb{N}$, so dass

$$\prod_{l=m}^{\infty} a_l = \overline{a_m} \neq 0$$

ist. Daher ist auch $a_l \neq 0$ für $l \geq m$. Damit gibt es höchstens endlich viele Faktoren, nämlich $a_0, \ldots, a_{m-1}$, die gleich Null sein können. Sei weiters

$$j := \max\{l \in \mathbb{N} \,:\, a_l = 0\}$$

$(l \leq m-1)$. Dann gilt:

$$a_{j+1}a_{j+2} \cdots a_{m-1}\overline{a_m} \neq 0.$$

2) Sei andererseits $m \in \mathbb{N}$, so dass $a_m = 0$ und $a_l \neq 0$ ist für alle $l > m$. Weiters existiere

$$\prod_{l=m+1}^{\infty} a_l = \overline{a_{m+1}}$$

und sei ungleich Null. Dann ist

$$\prod_{l=0}^{\infty} a_l$$

nach Definition konvergent mit Wert $a = a_0 \cdots a_m\overline{a_{m+1}}$. ☺

Durch die getroffenen Einschränkungen wird die Sonderrolle der Null optimal berücksichtigt. Wie für endliche Produkte gilt:

4.1.13 Satz. *Ein konvergentes Produkt $\prod_{l=0}^{\infty} a_l$ ist genau dann Null, wenn wenigstens ein Faktor Null ist.*

Beweis. Dies folgt direkt aus der Definition. ☺

Wir notieren weiter:

4.1.14 Satz. *Konvergiert $\prod_{l=0}^{\infty} a_l$, so existiert*

$$\overline{a_n} := \prod_{l=n}^{\infty} a_l$$

für alle $n \in \mathbb{N}$. Weiters gilt:

$$\lim_{n\to\infty} \overline{a_n} = 1 \text{ und } \lim_{n\to\infty} a_n = 1.$$

Beweis. Aufgrund der Definition und wegen $n \to \infty$ dürfen wir $\prod_{l=0}^{\infty} a_l = a \neq 0$ annehmen. Dann gilt:

$$\overline{a_n} = \frac{a}{p_{0,n-1}}.$$

Da $\lim_{n\to\infty} p_{o,n-1} = a$ ist, folgt:

$$\lim_{n\to\infty} \overline{a_n} = 1.$$

Für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt $\overline{a_n} \neq 0$ und da

$$a_n = \frac{\overline{a_n}}{\overline{a_{n+1}}}$$

ist, folgt:

$$\lim_{n\to\infty} a_n = 1.$$

[42] ☺

4.1.15 Bemerkung. *Aus $\lim_{l\to\infty} a_l = 1$ folgt nicht, dass $\prod_{l=0}^{\infty} a_l$ konvergiert, denn: Sei $a_l = 1 - \frac{1}{l+2}$, dann ist $\lim_{l\to\infty} a_l = 1$, aber es gilt für alle $j \geq 2$:*

$$\prod_{l=j}^{\infty}(1-\frac{1}{l}) \leq \prod_{l=j}^{\infty}\exp(-\frac{1}{l}) = \exp(-\sum_{l=j}^{\infty}\frac{1}{l}) = 0$$

Für unsere Zwecke zeigen wir noch folgenden Hilfssatz:

4.1.16 Hilfssatz. *Seien $a, A, B \in \mathbb{R}$ mit $a > 1$ und $0 < A < B < \infty$. Weiters sei $\mu_k \in [A, B]$ für alle $k \in \mathbb{N}$. Dann ist genau dann*

$$\lim_{n\to\infty} \prod_{k=1}^{n} \cos(\mu_k a^{-k}) = 0,$$

wenn es ein $k \in \mathbb{N}$ gibt mit

$$\cos(\mu_k a^{-k}) = 0.$$

Beweis. Die Aussage des Hilfssatzes folgt aus 4.1.12 und 4.1.13, falls das Produkt konvergiert. Um das nachzuweisen, müssen wir zeigen, dass es einen Wert k_0 gibt, so dass

$$\prod_{k=k_0}^{\infty} \cos(\mu_k a^{-k})$$

existiert und ungleich 0 ist:

Es gibt ein k_0, so dass für alle $k \geq k_0$ gilt:

$$|\mu_k a^{-k}| < \frac{1}{2}.$$

Damit ist

$$\cos(\mu_k a^{-k}) \geq 1 - \frac{(\mu a^{-k})^2}{6} > 0.$$

Weiters gilt für alle $x \in \mathbb{R}$ mit $|x| < \frac{1}{2}$:

$$1 - x = \frac{1 - x^2}{1 + x} > \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{1 + x}.$$

Es folgt, da $1 + x \leq e^x$ für alle $x \in \mathbb{R}$ ist:

$$\prod_{k=k_0}^{\infty} \cos(\mu_k a^{-k}) \geq \prod_{k=k_0}^{\infty} (1 - \frac{(\mu_k a^{-k})^2}{6}) \geq \frac{3}{4} \prod_{k=k_0}^{\infty} (1 + \frac{(\mu_k a^{-k})^2}{6})^{-1} \geq$$
$$\geq \frac{3}{4} \prod_{k=k_0}^{\infty} (\exp(\frac{(\mu_k a^{-k})^2}{6}))^{-1} = \frac{3}{4} \prod_{k=k_0}^{\infty} \exp(-\frac{(\mu_k a^{-k})^2}{6}) = \frac{3}{4} \exp(-\sum_{k=k_0}^{\infty} \frac{(\mu_k a^{-k})^2}{6}) \geq$$
$$\geq \frac{3}{4} \exp(-\sum_{k=k_0}^{\infty} \frac{A^2}{6} \cdot \frac{1}{a^{2k}}) = \frac{3}{4} \exp(-\frac{A^2}{6} \cdot \frac{1/a^{2k_0}}{1 - 1/a^2}) > 0.$$

☺

Doch nun zur Verbindung von P.V.- und Salem-Zahlen mit der Schilling'schen Funktionalgleichung.

4.1.17 Satz. *Sei $a \neq 2$ eine P.V.-Zahl. Dann gilt* **nicht***:*

$$\lim_{x \to \infty} \prod_{k=0}^{\infty} \cos(\frac{1}{a^k} x) = 0.$$

Beweis. Sei a eine P.V.-Zahl mit Minimalpolynom P, das die Nullstellen $a, a_2, \ldots, a_m$ hat. Für $n \in \mathbb{N}$ ist $a^n + a_2^n \ldots + a_m^n$ ein symmetrischer Ausdruck und nach 5.5.1 ist somit $a^n + \ldots + a_m^n \in \mathbb{Z}$ für alle $n \in \mathbb{N}$. (Außerdem ist $a_2^n + \ldots + a_m^n \in \mathbb{R}$ da $a \in \mathbb{R}$ ist.) Da $|a_j| < 1$ ist für $j = 2, \ldots, m$, gilt:

$$\lim_{n \to \infty} a_2^n + \ldots a_m^n = 0.$$

(Damit gilt für große n, dass $a_2^n + \ldots a_m^n = E(a^n)$ ist.) Daraus ergibt sich sofort:

$$\lim_{n \to \infty} |a^n - E(a^n)| = 0$$

Das heißt also, dass der Abstand von a^n zur nächsten ganzen Zahl für große n gegen 0 geht.

Sei weiters:

$$1 > \theta > \sup\{|a_2|, \ldots, |a_m|\}.$$

Dann gibt es ein $n_0 \in \mathbb{N}$, so dass für alle $n \geq n_0$ gilt:

$$\frac{1}{2} > \theta^n > |a^n - E(a^n)| \geq 0.$$

Wir betrachten nun die Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $x_n := a^n\pi$ und erhalten für $n \geq n_0$:

$$\prod_{k=0}^{\infty} \cos(a^{-k}x^n) = \prod_{k=0}^{\infty} \cos(a^{-k}a^n\pi) = \prod_{k=1}^{n} \cos(a^k\pi) \cdot \underbrace{\prod_{k=0}^{\infty} \cos(a^{-k}\pi)}_{=:C\neq 0}.$$

(Die Konstante C kann nur 0 sein, wenn $a^{-k} = \frac{u}{2}$ für ein ungerades $u \in \mathbb{N}$ ist. Da aber a^k eine P.V.-Zahl ist (da a eine P.V.-Zahl ist) ist dies nur für $u = 1$ und damit nur für $a = 2$ möglich. Nach Vorraussetzung haben wir diese Zahl jedoch ausgenommen. Nach 4.1.16 konvergiert also das Produkt. Später werden wir sehen, dass die 2 eine besondere Rolle spielt.)

Nun können wir weiter abschätzen:

$$|\prod_{k=0}^{\infty} \cos(a^{-k}a^n\pi)| = \underbrace{|C| \cdot \prod_{k=1}^{n_0-1} |\cos(a^k\pi)|}_{=:C'\neq 0} \cdot \prod_{k=n_0}^{n} |\cos(a^k\pi)| \geq C' \cdot \prod_{k=n_0}^{n} |\cos(\theta^k\pi)|.$$

(Die Konstante C' kann nur 0 sein, wenn $a^k = \frac{u}{2}$ für ein ungerades $u \in \mathbb{N}$ ist. Dies ist aber aufgrund der oben genannten Eigenschaften von P.V.-Zahlen unmöglich.)

Damit gilt für alle $x_n = a^n\pi$ mit $n \geq n_0$:

$$|\prod_{k=0}^{\infty} \cos(a^{-k}x)| \geq C' \cdot \prod_{k=n_0}^{\infty} |\cos(\theta^k\pi)| =: C'' > 0.$$

Es gilt also für alle $x_n = a^n\pi$ mit $n \geq n_0$:

$$\prod_{k=0}^{\infty} \cos(\frac{1}{a^k}x_n) \geq C'' \neq 0.$$

Da $x_n \to \infty$ für $n \to \infty$ kann das Produkt im Unendlichen nicht gegen 0 konvergieren. [15] ☺

4.1.18 Folgerung. *Ist $q \neq \frac{1}{2}$ das Reziproke einer P.V.-Zahl, so gibt es keine Schilling-Funktion zum Wert q.*

Beweis. Nach 3.1.3 gibt es für jede L^1-Lösung von (1), ein $c \in \mathbb{R}$, so dass für alle $x \in \mathbb{R}$ gilt:

$$\hat{f}(x) = c \cdot g_q(x) = c(\prod_{k=1}^{\infty} \cos(\frac{q^k x}{2}))^2.$$

Nach dem Riemann-Lebesgue-Lemma gilt weiters:

$$\lim_{x\to\infty} \hat{f}(x) = \lim_{x\to\infty} c(\prod_{k=1}^{\infty} \cos(\frac{q^k x}{2}))^2 = 0.$$

Ist nun aber $\frac{1}{q} \neq 2$ eine P.V.-Zahl, dann gilt nach 4.1.17 **nicht**

$$\lim_{x\to\infty} c(\prod_{k=0}^{\infty} \cos(\frac{q^k x}{2}))^2 = \frac{c}{\cos(\frac{x}{2})^2} \cdot (\lim_{x\to\infty} \prod_{k=1}^{\infty} \cos(\frac{q^k x}{2}))^2 = 0$$

im Widerspruch zu Riemann Lebesgue. Es gibt also in diesem Fall keine Schilling-Funktion zum Wert q. [14] ☺

Es ist sogar möglich, einige P.V.-Zahlen bzw. die dazugehörigen Polynome direkt anzugeben:

4.1.19 Satz. *P.V.-Zahlen kleiner als $\widehat{\theta}_{15} = 1.6183608\ldots$ können wie folgt angeordnet werden:*

$$\theta_2 = \theta_1' < \theta_2' < \theta_3' < \theta_3 < \theta_4' < \theta_4 < \theta_5' < \theta'' < \theta_5 < \theta_6' < \ldots < \theta_n' < \theta_n <$$
$$< \theta_{n+1} < \ldots < \frac{1+\sqrt{5}}{2} < \ldots < \widehat{\theta}_n < \widehat{\theta}_{n+1}' < \widehat{\theta}_{n-1} < \ldots < \widehat{\theta}_{15}.$$

Dabei sind für $p \geq 1$ die algebraischen Zahlen θ_{2p} bzw. θ_{2p+1} Wurzeln der Polynome

$$P_{2p}(x) = \frac{1 - x^{2p}(1 + x - x^2)}{1 - x} \quad \textit{bzw.} \quad P_{2p+1}(x) = \frac{1 - x^{2p+1}(1 + x - x^2)}{1 - x^2}.$$

Für $p \geq 7$ sind die algebraischen Zahlen $\widehat{\theta}_{2p}$ bzw. $\widehat{\theta}_{2p+1}$ Wurzeln der Polynome

$$\widehat{P}_{2p}(x) = \frac{1 + x^{2p}(1 + x - x^2)}{1 + x} \quad \textit{bzw.} \quad \widehat{P}_{2p+1}(x) = 1 + x^{2p+1}(1 + x - x^2).$$

Die P.V.-Zahlen θ'', θ_n' und $\widehat{\theta}_n'$ für $n \geq 17$ sind Nullstellen der Polynome

$$1 - x + x^2 - x^4 + 2x^5 - x^6, \quad 1 - x^2 + x^n(1 + x - x^2) \quad \textit{und} \quad 1 - x^2 - x^n(1 + x - x^2).$$

Beweis. Siehe [4]. ☺

Können wir die oben verwendete Methode auch auf andere Zahlen anwenden? Gibt es also andere Zahlen außer den P.V.-Zahlen, für die das Produkt im Unendlichen nicht gegen 0 geht? Der folgende Satz gibt die Antwort.

4.1.20 Satz. *Sei $0 < \frac{1}{a} < 1$ und $a \neq 2$. Ist a keine P.V.-Zahl, dann gilt:*

$$\lim_{x\to\infty} \prod_{k=0}^{\infty} \cos(\pi x a^{-k}) = 0.$$

Beweis. Sei $a \in \mathbb{R}$ keine P.V.-Zahl mit $0 < \frac{1}{a} < 1$. Wir nehmen an, es gibt eine streng monoton steigende Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}, x_0 > 1$ mit $\lim_{n\to\infty} x_n = \infty$, so dass für alle $n \in \mathbb{N}$ und ein $b \in \mathbb{R}, b > 0$, gilt:

$$|\prod_{k=0}^{\infty} \cos(\pi x_n a^{-k})| > b.$$

Für jedes x_n gibt es ein $m_n = m \in \mathbb{N}$, so dass

$$a^{m-1} < x_n \leq a^m$$

ist. Wir können also $x_n = \mu_n a^{m_n}$ schreiben, wobei $\frac{1}{a} < \mu_n \leq 1$ ist. Damit ist $\mu_n \in]\frac{1}{a}, 1]$ für jedes $n \in \mathbb{N}$ und die Folge $(\mu_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ist beschränkt. Darum gibt es eine Teilfolge (x_l) von (x_n), so dass die zugehörige Teilfolge (μ_l) von (μ_n) einen Grenzwert μ (mit $\frac{1}{a} \leq \mu \leq 1$) besitzt. Für jedes Element dieser Teilfolge gilt:

$$b < |\prod_{k=0}^{\infty} \cos(\pi x_l a^{-k})| = |\prod_{k=0}^{\infty} \cos(\pi \mu_l a^{m_l} a^{-k})| = |\prod_{k=0}^{m_l} \cos(\pi \mu_l a^k|) \cdot \underbrace{|\prod_{k=1}^{\infty} \cos(\pi \mu_l a^{-k})}_{\neq 0, <1} | \leq$$

$$\leq |\cos(\pi\mu_l) \cdot \cos(\pi\mu_l a) \cdot \cos(\pi\mu_l a^2) \cdots \cos(\pi\mu_l a^{m_l})|.$$

Und daraus folgt:

$$(1 - \sin^2(\pi\mu_l)) \cdot (1 - \sin^2(\pi\mu_l a)) \cdots (1 - \sin^2(\pi\mu_l a^{m_l})) \geq b^2.$$

Mit der Ungleichung 5.5.2 erhalten wir:

$$\exp(-\sin^2(\pi\mu_l) - \sin^2(\pi\mu_l a) - \ldots - \sin^2(\pi\mu_l a^{m_l})) \geq b^2.$$

Nach weiteren Umformungen ergibt sich schließlich:

$$\sin^2(\pi\mu_l) + \sin^2(\pi\mu_l a) + \ldots + \sin^2(\pi\mu_l a^{m_l}) \leq \log(\frac{1}{b^2}).$$

(Diese Ungleichung gilt für jedes $l \in \mathbb{N}$.) Sei nun l fest, so gilt für $r \geq l$ nach der Definition von (μ_n), dass $m_r \geq m_l$ ist. Damit gilt jedoch:

$$\begin{aligned} \log(\frac{1}{b^2}) &\geq \sin^2(\pi\mu_r) + \ldots + \sin^2(\pi\mu_r a^{m_l}) + \ldots + \sin^2(\pi\mu_r a^{m_r}) \geq \\ &\geq \sin^2(\pi\mu_r) + \ldots + \sin^2(\pi\mu_r a^{m_l}). \end{aligned}$$

Lassen wir nun r gegen unendlich gehen, erhalten wir, da $\lim_{r\to\infty} \mu_r = \mu$ ist:

$$\sin^2(\pi\mu) + \ldots + \sin^2(\pi\mu a^{m_l}) \leq \log(\frac{1}{b^2}).$$

Da aber l beliebig gewählt werden kann, folgt damit:

$$\sum_{k=0}^{\infty} \sin^2(\pi\mu a^k) \leq \log(\frac{1}{b^2}).$$

Nach dem Satz von Pisot (siehe 4.1.6) ist damit aber a eine P.V.-Zahl im Widerspruch zur Annahme a sei keine P.V.-Zahl. [43] ☺

4.1.21 Folgerung. *Sei $a \in \mathbb{R}$, $a > 1$. Dann ist a genau dann keine P.V.-Zahl, wenn gilt:*

$$\lim_{x\to\infty} |\prod_{k=0}^{\infty} \cos(\pi x a^{-k})| = 0.$$

Beweis. Dies folgt direkt mit 4.1.17 und 4.1.20. ☺

Wir sehen also, dass es nicht möglich ist das Ergebnis von 4.1.18 auch für Nicht-P.V.-Zahlen zu erhalten. Doch wie verhalten sich die nahen Verwandten der P.V.-Zahlen, die Salem-Zahlen? Bei ihnen fällt das Ergebnis nicht so negativ aus wie bei den P.V.-Zahlen. Doch dazu benötigen wir vorerst noch folgenden Satz:

4.1.22 Satz. *Sei a eine Salem-Zahl, dann gilt für alle $\varepsilon > 0$:*

$$\lim_{x\to\infty} |x^\varepsilon \cdot \prod_{k=0}^{\infty} \cos(\frac{x}{a^k})| = \infty.$$

Beweis. Sei a eine Salem-Zahl und $\varepsilon > 0$. Wir wählen nun η mit $0 < \eta < \frac{1}{2}$, so dass

$$\sqrt{1-\eta^2} \cdot a^\varepsilon > 1$$

ist. Also:

$$\eta < \sqrt{1 - \frac{1}{a^{2\varepsilon}}}.$$

Zu diesem η gibt es nach 4.1.7 ein $\mu \in \mathbb{R}, \mu \neq 0$, und ein $n_0 \in \mathbb{N}$, so dass für alle $n \geq n_0$

$$|\sin(\mu a^n \pi)| < \eta$$

ist. Daraus leiten wir folgende Ungleichungen ab:

$$\begin{array}{rcl} |\sin(\mu a^n \pi)| & < & \eta \\ \sin^2(\mu a^n \pi) & < & \eta^2 \\ 1 - \sin^2(\mu a^n \pi) & > & 1 - \eta^2 \\ |\cos(\mu a^n \pi)| & > & \sqrt{1-\eta^2} \end{array}$$

Nun betrachten wir $x_n := \mu a^n \pi$. Es gilt:

$$\prod_{k=0}^{\infty} |\cos(\frac{x_n}{a^k})| = \prod_{k=0}^{\infty} |\cos(a^{-k}\mu a^n \pi)| = \prod_{k=1}^{n} |\cos(\mu a^k \pi)| \cdot \prod_{k=0}^{\infty} |\cos(\mu a^{-k}\pi)|.$$

Mit dieser bereits bekannten Zerlegung des Produkts schätzen wir nun ab:

$$\begin{array}{rcl} |x_n^\varepsilon \cdot \displaystyle\prod_{k=0}^{\infty} \cos(\frac{x_n}{a^k})| & = & |(\mu a^n \pi)^\varepsilon \cdot \displaystyle\prod_{k=0}^{\infty} \cos(\mu a^{-k} a^k \pi)| = \\ & = & |(\mu a^n \pi)^\varepsilon| \cdot \displaystyle\prod_{k=1}^{n} \underbrace{|\cos(\mu a^k \pi)|}_{\geq \sqrt{1-\eta^2}} \cdot \underbrace{\displaystyle\prod_{k=0}^{\infty} |\cos(\mu a^{-k}\pi)|}_{:=C\neq 0} \geq \\ & \geq & \underbrace{C \cdot |\mu\pi|^\varepsilon}_{:=C'} \cdot \sqrt{1-\eta^2}^{\,n} \cdot |a^\varepsilon|^n = C' \cdot \underbrace{|\sqrt{1-\eta^2} \cdot a^\varepsilon|^n}_{>1 \text{ nach Wahl von } \eta}. \end{array}$$

Damit gilt also:

$$\lim_{n\to\infty} |x_n^\varepsilon \cdot \prod_{k=0}^{\infty} \cos(\frac{x_n}{a^k})| = \infty.$$

Für beliebiges x beachten wir, dass $x \in]a^m, a^{m+1}]$ ist für ein $m \in \mathbb{N}$. Also können wir x schreiben als:

$$x = a^m v \quad \text{mit } v \in]1, a].$$

Ist nun $C'' \in \mathbb{R}, C'' > 0$ und x (also m) groß genug, so kann man analog zur obigen Abschätzung zeigen, dass

$$\prod_{k=0}^{\infty} |\cos(\frac{x}{a^k})| > C''$$

ist, was die Behauptung beweist. [43] ☺

Und mit diesem Hilfsmittel können wir nun folgenden Satz zeigen.

4.1.23 Folgerung. *Sei a eine Salem-Zahl. Dann gibt es für $q = \frac{1}{a}$ keine nichttriviale Lösung f von (1), so dass $f \in L^1 \cap L^2$ ist.*

Beweis. Sei $C \in \mathbb{R}, C > 0$. Da nach 4.1.22 für alle $\varepsilon > 0$

$$\lim_{x\to\infty} |x^\varepsilon \cdot \prod_{k=0}^{\infty} \cos(\frac{x}{a^k})| = \infty$$

ist, gibt es zu jedem ε ein $x_\varepsilon \in \mathbb{R}$, so dass für alle $x > x_\varepsilon$ gilt:

$$|\prod_{k=0}^{\infty} \cos(xa^{-k})| > \frac{C}{x^\varepsilon}.$$

Damit gilt aber auch:

$$|\prod_{k=1}^{\infty} \cos^2(xa^{-k})| > \frac{C}{x^{2\varepsilon}}.$$

Für $\varepsilon < \frac{1}{4}$ gilt also:

$$|\prod_{k=1}^{\infty} \cos^2(xa^{-k})| > \frac{C}{\sqrt{x}}.$$

Ist $f \in L^1 \cap L^2$, so ist auch $\hat{f} \in L^1 \cap L^2$. Es gilt aber nach obiger Abschätzung für $x > x_0$:

$$\int_{\mathbb{R}} |\hat{f}(y)|\, d\lambda(y) > 2 \cdot \underbrace{\int_{]-x,x[} |\hat{f}(y)|\, d\lambda(y)}_{:=C'>0} + 2 \cdot \int_{[x,\infty[} |\frac{C}{\sqrt{y}}|^2\, d\lambda(y) =$$

$$= 2C' + 2 \cdot \int_{[x,\infty[} \frac{C^2}{y}\, d\lambda(y) = 2C' + 2[C^2 \log(y)]_x^\infty = \infty.$$

Damit ist $f \notin L^2$, was einen Widerspruch darstellt. Also kann f nicht aus $L^1 \cap L^2$ sein. [14] ☺

Dieser Satz schließt also die Existenz von nichttrivialen Lösungen für die Kehrwerte von Salem-Zahlen aus, sofern diese in $L^1 \cap L^2$ liegen sollen. Ob es zu diesen Werten überhaupt eine Schilling-Funktion gibt, ist nicht bekannt.

4.2 Nichttriviale Lösungen

In diesem Abschnitt wollen wir auf die Suche nach Schilling-Funktionen gehen. Dabei sind nur sehr wenige explizit bekannt. Das mag damit zusammenhängen, dass es, im Sinne des folgenden Satzes, „wenige" Lösungen gibt.

4.2.1 Satz. *Der Vektorraum der integrierbaren Lösungen von (1) hat höchstens die Dimension 1.*

Beweis. Dies könnte man aus 2.2.1 folgern. Doch hier sei ein anderer Beweis gegeben: Die Integration ist eine lineare Abbildung vom Raum aller intergrierbarer Lösungen auf den eindimensionalen Raum $\mathbb{R}$. Nach 4.1.1 enthält der Kern dieser Abbildung nur die Null - Funktion. Somit kann die Dimension des Raumes der integrierbaren Lösungen nicht größer als 1 sein. [17] ☺

Der nächste Satz liefert auch ein eher negatives Ergebnis. Es zeigt, dass es für $q < \frac{1}{2}$ keine nichttriviale, stetige Schilling-Funktion geben kann.

4.2.2 Satz. *Sei $0 < q < \frac{1}{2}$ und f eine L^1 - Lösung von (1). Weiters sei $p \in \mathbb{R}$ definiert durch*

$$p := \frac{\log(q)}{\log(2q)} > 1.$$

Dann gilt für alle $\varepsilon > 0$

$$I_\varepsilon := \int\limits_{[-\varepsilon,\varepsilon]} |f(x)|^p \, d\lambda(x) = \infty.$$

Beweis. Angenommen es gilt für ein $\varepsilon_0 > 0$, dass $I_{\varepsilon_0} < \infty$ ist. Wegen der Monotonie des Integrals ist dann auch

$$0 \leq I_{\varepsilon_1} \leq I_{\varepsilon_2} \leq I_{\varepsilon_0} < \infty$$

für $0 < \varepsilon_1 < \varepsilon_2 \leq \varepsilon_0$, und wir unterscheiden zwei Fälle:

Fall 1: Sei $I_\varepsilon = 0$, dann ist fast überall $f(x) = 0$ für $x \in]-\varepsilon, \varepsilon[$ und wir können annehmen, dass $f(x) = 0$ ist für $x \in]-\varepsilon, \varepsilon[$, denn auch dann ist (1) fast überall erfüllt. Damit ist aber $f(0) = 0$ und f in 0 stetig. Aus 4.1.2 folgt nun aber, dass $f = 0$ ist im Widerspruch zur Voraussetzung $f \neq 0$.

Fall 2: Sei $0 < I_\varepsilon < \infty$ für ein $\varepsilon > 0$ mit $\varepsilon \in]0, 1-Q[$. Wegen der Stetigkeit des Lebesgue-Maßes dürfen wir annehmen, dass $0 < I_{q\varepsilon} < I_\varepsilon < \infty$ ist. Aus (2) folgt für $|x| < 1 - Q$, dass $x - 1, x + 1 \notin [-Q, Q]$ sind und damit gilt $f(x-1) = 0 = f(x+1)$. Daraus folgt mit (1), dass für x mit $|x| < 1 - Q$ gilt

$$2qf(qx) = f(x)$$

und damit erhalten wir

$$I_\varepsilon = \int\limits_{[-\varepsilon,\varepsilon]} |f(x)|^p \, d\lambda(x) = (2q)^p \int\limits_{[-\varepsilon,\varepsilon]} |f(qx)|^p \, d\lambda(x) = \frac{(2q)^p}{q} \int\limits_{[-q\varepsilon,q\varepsilon]} |f(y)|^p dy =$$

$$= \frac{(2q)^p}{q} I_{q\varepsilon} < \frac{(2q)^p}{q} I_\varepsilon = e^{\frac{\log(q)}{\log(2q)} \cdot \log(2q)} \frac{1}{q} I_\varepsilon = \frac{q}{q} I_\varepsilon = I_\varepsilon.$$

Also $I_\varepsilon < I_\varepsilon$, was natürlich ein Widerspruch ist. Es muss somit für alle $\varepsilon > 0$ gelten, dass $I_\varepsilon = \infty$ ist. [3] ☺

4.2.3 Folgerung. *Sei $0 < q < \frac{1}{2}$. Dann gibt es keine beschränkte Schilling-Funktion zum Wert q und damit auch keine stetige.*

Beweis. Angenommen es gibt eine beschränkte Schilling-Funktion f für ein $q, 0 < q < \frac{1}{2}$. Dann ist auch die Funktion f_p, definiert durch $f_p(x) := |f(x)|^p$, beschränkt (für $p := \frac{\log(q)}{\log(2q)}$). Es gibt also ein $C > 0$ mit

$$f_p(x) \leq C$$

für alle $x \in \mathbb{R}$. Also ist

$$\int\limits_{[-\varepsilon,\varepsilon]} |f(x)|^p \, d\lambda(x) = \int\limits_{[-\varepsilon,\varepsilon]} f_p(x) \, d\lambda(x) \leq \int\limits_{[-\varepsilon,\varepsilon]} C \, d\lambda(x) = 2C\varepsilon < \infty$$

im Widerspruch zu 4.2.2. Es kann also keine beschränkte Schilling-Funktion geben.

Weiters ist jede stetige Schilling-Funktion beschränkt, da sie einen kompakten Träger hat. Angenommen es gibt eine stetige Schilling-Funktion für $0 < q < \frac{1}{2}$, so ist diese beschränkt im Widerspruch zur obigen Überlegung. Damit gibt es für $0 < q < \frac{1}{2}$ keine stetige Schilling-Funktion. [3] bzw. [14] ☺

Doch nun zu einem positiven Ergebnis: die Schilling-Funktion für den Wert $q = \frac{1}{2}$. Die Ursprünge dieser Lösung gehen gewissermaßen bis ins 16. Jahrhundert zurück. Im Jahr 1593 gab François Viète[1] nämlich in der Arbeit *Variorum de Rebus Mathematicis* das erste Mal in der Geschichte ein unendliches Produkt zur Berechnung des Wertes von π an (genauer von $\frac{2}{\pi}$):

$$\frac{2}{\pi} = \sqrt{\frac{1}{2}} \cdot \sqrt{\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2}}} \cdot \sqrt{\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2}}}} \cdots$$

Diese Formel lässt sich leicht herleiten. Wir verwenden zunächst die bekannte Beziehung

$$\sin(x) = 2\sin(\frac{x}{2})\cos(\frac{x}{2})$$

und wenden sie wiederholt an. Das führt zu:

$$\sin(x) = 2\sin(\frac{x}{2})\cos(\frac{x}{2}) = 2 \cdot 2\sin(\frac{x}{4})\cos(\frac{x}{4})\cos(\frac{x}{2}) =$$
$$= \ldots = 2^n \cdot \sin(\frac{x}{2^n})\cos(\frac{x}{2^n}) \cdots \cos(\frac{x}{2}) = 2^n \cdot \sin(\frac{x}{2^n}) \cdot \prod_{k=1}^{n} \cos(\frac{x}{2^k}).$$

Weiters gilt mit dem Satz von de l'Hospital:

$$\lim_{n\to\infty} 2^n \cdot \sin(\frac{x}{2^n}) = \lim_{n\to\infty} \frac{\sin(\frac{x}{2^n})}{\frac{1}{2^n}} = \lim_{y\searrow 0} \frac{\sin(xy)}{y} = \lim_{y\searrow 0} \frac{x\cos(xy)}{1} = x.$$

Und damit erhalten wir für $x \neq 0$ die Formel:

$$\prod_{k=0}^{\infty} \cos(\frac{x}{2^k}) = \frac{\sin(x)}{x}.$$

(Diese ist auch für $x = 0$ richtig, wie man mit de l'Hospital leicht zeigt.) Viète verwendete noch

$$\cos(\frac{x}{2}) = \sqrt{\frac{1}{2}(1 + cos(x))}$$

und setzte $x = \frac{\pi}{2}$.

Uns interessiert diese geschichtliche Notiz in dem Sinne, dass wir die Schilling-Funktion zum Wert $\frac{1}{2}$ daraus ableiten können.

4.2.4 Satz. *Für $q = \frac{1}{2}$ ist (bis auf einen konstanten Faktor)*

$$g_{\frac{1}{2}}(x) = \prod_{k=0}^{\infty} \cos^2(\frac{x}{2^k}) = \frac{\sin^2(x)}{x^2}.$$

Dies ist (bis auf einen konstanten Faktor) die Fourier Transformierte folgender Funktion $f_{\frac{1}{2}}$, die damit die Schilling-Funktion zum Wert $\frac{1}{2}$ ist (siehe Abbildung 1)

$$\begin{aligned} f_{\frac{1}{2}} : \mathbb{R} &\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto \max(0, 1 - |x|). \end{aligned}$$

[1]François Viète ist besser bekannt unter dem Namen Franciscus Vieta. Zu seiner Zeit war es üblich als Wissenschafter seinen Namen zu „latinisieren“.

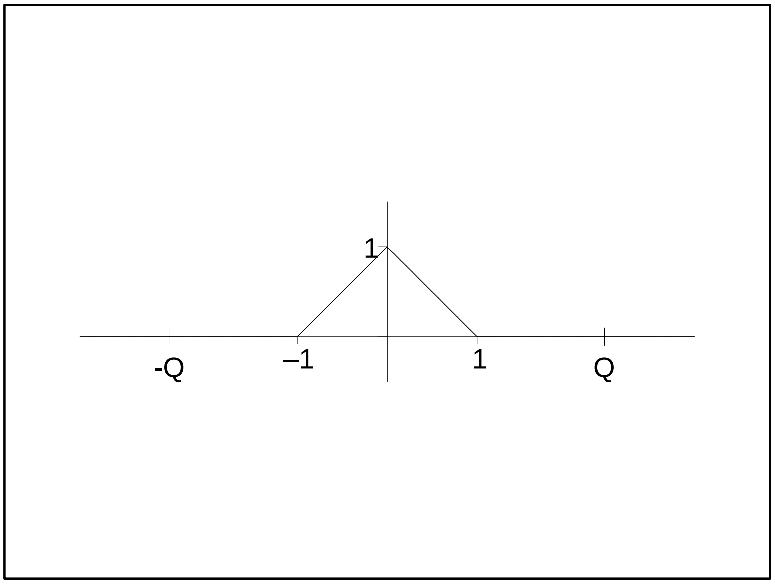

Abbildung 1: Lösung für $q = \frac{1}{2}$

Beweis. Wie oben bereits gezeigt liefert uns Viètes Produkt $g_{\frac{1}{2}}(x) = \frac{\sin^2(x)}{x^2}$ und der Rest ist eine einfache Rechnung. Sei dazu $f := f_{\frac{1}{2}}$.

$$\hat{f}(x) = \int_{\mathbb{R}} e^{-itx} \cdot \max(0, 1 - |t|) \, d\lambda(t) = \int_{[-1,0]} e^{-itx} \cdot (1+t) \, d\lambda(t) + \int_{[0,1]} e^{-itx} \cdot (1-t) \, d\lambda(t) =$$

$$= \frac{1}{-ix} - \frac{e^{ix}}{-ix} + \frac{e^{ix}}{-ix} - \frac{1}{(-ix)^2} + \frac{e^{ix}}{(-ix)^2} + \frac{e^{-ix}}{-ix} - \frac{1}{-ix} - \frac{e^{-ix}}{-ix} + \frac{e^{ix}}{(-ix)^2} - \frac{1}{(-ix)^2} =$$

$$= -\frac{1}{x^2}(e^{ix} - 2e^{i\frac{x}{2}}e^{-i\frac{x}{2}} + e^{-ix}) = -\frac{1}{x^2}(e^{i\frac{x}{2}} - e^{-i\frac{x}{2}})^2 = -\frac{1}{x^2}(\frac{2\sin(x)}{i})^2 = \frac{4\sin^2(x)}{x^2}.$$

[3] ☺

Der nächste Satz liefert uns nun sogar die Möglichkeit aus der Schilling-Funktion zum Wert $\frac{1}{2}$ die Schilling-Funktion zum Wert $\frac{1}{\sqrt[k]{2}}, k \in \mathbb{N}$ abzuleiten (die damit natürlich existiert).

4.2.5 Satz. *Sei f_1 die Schilling-Funktion zum Wert q_1. Weiters seien für $m, n \in \mathbb{N}, m \geq 1, m > n \geq 0$ die Funktion $\varphi_{m,n}$ für alle $x \in \mathbb{R}$ definiert durch:*

$$\varphi_{m,n}(x) := f_1(x \sqrt[m]{q_1}^n).$$

Dann existiert für $q_m = \sqrt[m]{q_1}$ ebenfalls eine L^1-Lösung f_m von (1). Diese ist gegeben durch:

$$f_m := \varphi_{m,0} * \varphi_{m,1} * \ldots * \varphi_{m,m-1},$$

das heißt, $\frac{f_m}{\|f_m\|_1}$ ist die Schilling-Funktion zum Wert $\sqrt[m]{q_1}$.

Beweis. Da f_1 die Schilling-Funktion zum Wert q_1 ist, ist $f_1 \in L^1$. Damit ist auch $\varphi_{m,n} : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \mapsto f_1(x \sqrt[m]{q_1}^n)$ für $m, n \in \mathbb{N}, m \geq 1, m > n \geq 0$ in L^1. Also ist auch $f_m := \varphi_{m,0} * \varphi_{m,1} * \ldots * \varphi_{m,m-1} \in L^1$.

Weiters gilt mit 3.1.3 für ein $c \in \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned}
\widehat{f_m}(x) &= \widehat{\varphi_{m,0}}(x) \cdot \widehat{\varphi_{m,1}}(x) \cdots \widehat{\varphi_{m,m-1}}(x) = \\
&= c \cdot \prod_{k=0}^{\infty} \cos^2\Big(\frac{q_1^k x}{2}\Big) \cdot \prod_{k=0}^{\infty} \cos^2\Big(\frac{q_1^k x}{2} \cdot \frac{1}{\sqrt[m]{q_1}}\Big) \cdots \prod_{k=0}^{\infty} \cos^2\Big(\frac{q_1^k x}{2} \cdot \frac{1}{\sqrt[m]{q_1}^{m-1}}\Big) = \\
&= c \cdot \prod_{k=0}^{\infty} \cos^2\Big(\frac{x}{2} q_1^{\frac{mk}{m}}\Big) \cdot \prod_{k=0}^{\infty} \cos^2\Big(\frac{x}{2} q_1^{\frac{mk-1}{m}}\Big) \cdots \prod_{k=0}^{\infty} \cos^2\Big(\frac{x}{2} q_1^{\frac{mk-(m-1)}{m}}\Big) = \\
&= c \cdot \prod_{k=0}^{\infty} \cos^2\Big(\frac{x}{2} \sqrt[m]{q_1}^k\Big).
\end{aligned}$$

Dabei ergibt sich die letzte Gleichung durch Umordnen der unendlichen, konvergenten Produkte. (Der Exponent des ersten Produkts durchläuft die Zahlen $0, m, 2m, 3m, \ldots$, der des zweiten die Zahlen $m-1, 2m-1, 3m-1, \ldots$ und so weiter.) Nach 3.1.3 ist damit aber f_m eine L^1-Lösung von (1) zum Wert $\sqrt[m]{q_1}$. Also ist $\frac{f_m}{\|f_m\|_1}$ die Schilling-Funktion zum Wert $\sqrt[m]{q_1}$. [3] ☺

4.2.6 Folgerung. *Für $m \geq 2$ existiert die Schilling-Funktion $f_{\frac{1}{\sqrt[m]{2}}}$ zum Wert $q = \frac{1}{\sqrt[m]{2}}$. Diese ist gegeben durch:*

$$f_{\frac{1}{\sqrt[m]{2}}} = \varphi_{m,0} * \varphi_{m,1} * \ldots * \varphi_{m,m-1}.$$

Dabei ist $\varphi_{m,n}$ für $0 \leq n \leq m-1$ gegeben durch $\varphi_{m,n}(x) := f_{\frac{1}{2}}(\frac{x}{\sqrt[m]{2}^n})$ für alle $x \in \mathbb{R}$.

Beweis. Die Behauptung folgt direkt aus 4.2.4 und 4.2.5. [3] ☺

4.2.7 Beispiel. *Wir wollen noch die Schilling-Funktion zum Wert $q = \frac{1}{\sqrt{2}}$ berechnen. Es ist $Q = \frac{q}{1-q} = \sqrt{2} + 1$ und $f_{\frac{1}{\sqrt{2}}} = f$ gegeben durch:*

$$\begin{aligned}
f(x) &= \varphi_{2,1} * \varphi_{2,0}(x) = \\
&= \int_{\mathbb{R}} \varphi_{2,1}(t) \cdot \varphi_{2,0}(t)\, d\lambda(t) = \\
&= \int_{[-\sqrt{2},\sqrt{2}]} \Big(1 - \Big|\frac{t}{\sqrt{2}}\Big|\Big) \cdot \max(0, 1 - |x-t|)\, d\lambda(t).
\end{aligned}$$

Da $f(x) = f(-x)$ ist, genügt es $x \geq 0$ zu betrachten. Weiters spielen folgende drei Ungleichungen eine Rolle:

$$\begin{aligned}
1 - |t-x| \geq 0 &\Leftrightarrow x - 1 \leq t \leq x + 1 \\
\frac{t}{\sqrt{2}} \leq 0 &\Leftrightarrow t \leq 0 \\
t - x \leq 0 &\Leftrightarrow t \leq x.
\end{aligned}$$

Damit ergeben sich folgende Fälle:

1. *Sei $0 \leq x \leq \sqrt{2}-1$ (siehe Abbildung 2).Dann ist $[-\sqrt{2}, \sqrt{2}] \cap [x-1, x+1] = [x-1, x+1]$ und*

$$\begin{aligned}
f(x) = &\int_{[x-1,0]} \Big(1 + \frac{t}{\sqrt{2}}\Big) \cdot (1 + t - x)\, d\lambda(t) + \\
&+ \int_{[0,x]} \Big(1 - \frac{t}{\sqrt{2}}\Big) \cdot (1 + t - x)\, d\lambda(t) + \int_{[x,x+1]} \Big(1 - \frac{t}{\sqrt{2}}\Big) \cdot (1 - t + x)\, d\lambda(t).
\end{aligned}$$

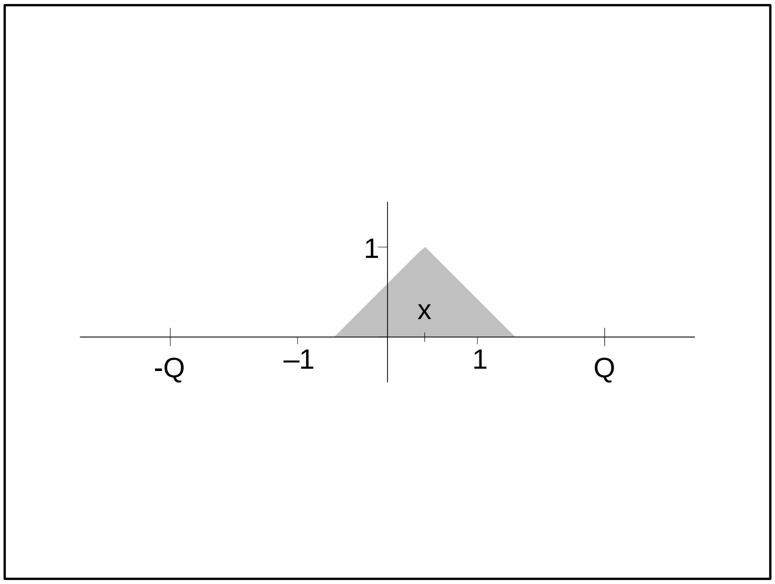

Abbildung 2

2. *Sei* $\sqrt{2} - 1 \leq x \leq \sqrt{2}$ *(siehe Abbildungen 3 und 4).Dann ist*

$$[-\sqrt{2}, \sqrt{2}] \cap [x-1, x+1] = [x-1, \sqrt{2}]$$

und wir müssen noch zwei Unterfälle berücksichtigen:

(a) *Es ist* $x - 1 \leq 0 \Leftrightarrow x \leq 1$ *(siehe Abbildung 3),dann ist*

$$f(x) = \int\limits_{[x-1,0]} (1 + \frac{t}{\sqrt{2}}) \cdot (1 + t - x)\, d\lambda(t) +$$

$$+ \int\limits_{[0,x]} (1 - \frac{t}{\sqrt{2}}) \cdot (1 + t - x)\, d\lambda(t) + \int\limits_{[x,\sqrt{2}]} (1 - \frac{t}{\sqrt{2}}) \cdot (1 - t + x)\, d\lambda(t).$$

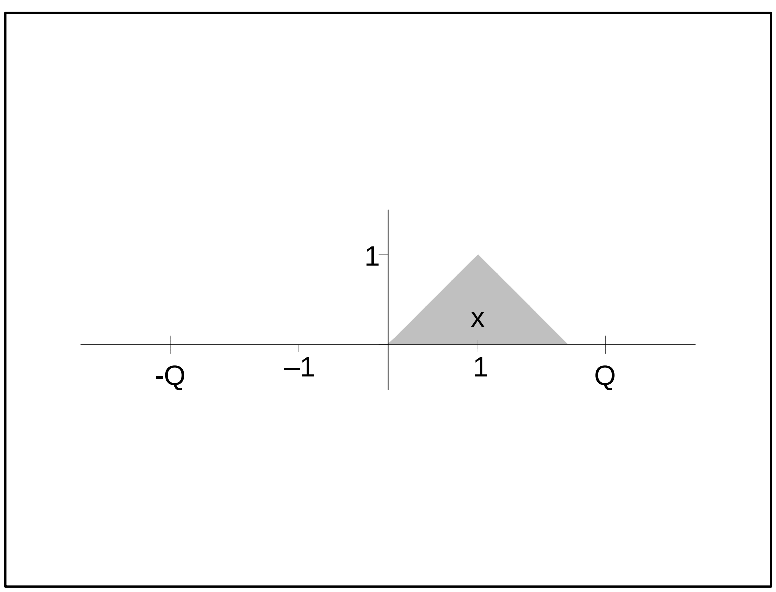

Abbildung 3

(b) *Ist andererseits* $x - 1 > 0 \Leftrightarrow 1 \le x$ *(siehe Abbildung 4),dann ist*

$$f(x) = \int\limits_{[x-1,x]} (1 - \frac{t}{\sqrt{2}}) \cdot (1 + t - x)\, d\lambda(t) + \int\limits_{[x,\sqrt{2}]} (1 - \frac{t}{\sqrt{2}}) \cdot (1 - t + x)\, d\lambda(t).$$

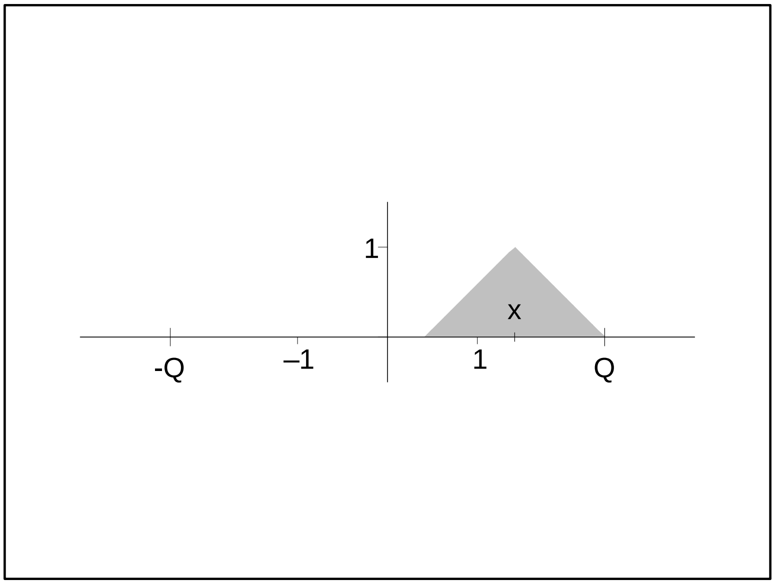

Abbildung 4

3. *Sei* $\sqrt{2} \le x \le \sqrt{2} + 1$ *(siehe Abbildung 5). Dann ist*

$$[-\sqrt{2}, \sqrt{2}] \cap [x - 1, x + 1] = [x - 1, \sqrt{2}]$$

und

$$f(x) = \int\limits_{[x-1,\sqrt{2}]} (1 - \frac{t}{\sqrt{2}}) \cdot (1 + t - x)\, d\lambda(t).$$

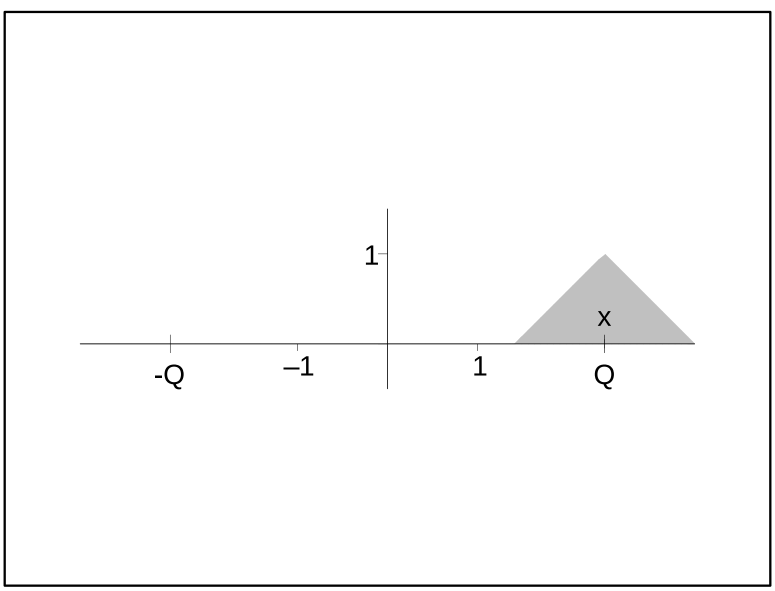

Abbildung 5

4. Sei $x > \sqrt{2}+1 = Q$, dann ist $f(x) = 0$.

Damit ergibt sich nach Normierung folgende Funktion (siehe Abbildung 6):

$$f(x) = \begin{cases} 2x^3 - 6x^2 - 2 + 6\sqrt{2} & \text{für } 0 \le x \le \sqrt{2}-1 \\ 3x^3 - 3(1+\sqrt{2})x^2 + 3(3-2\sqrt{2})x + 5 + \sqrt{2} & \text{für } \sqrt{2}-1 \le x \le 1 \\ x^3 + 3(1-\sqrt{2})x^2 + 3(1-2\sqrt{2})x + 7 + \sqrt{2} & \text{für } 1 \le x \le \sqrt{2} \\ (1+\sqrt{2}-x)^3 & \text{für } \sqrt{2} \le x \le \sqrt{2}+1 \\ 0 & \text{für } \sqrt{2}+1 \le x \\ f(-x) & \text{für } x \le 0 \end{cases}.$$

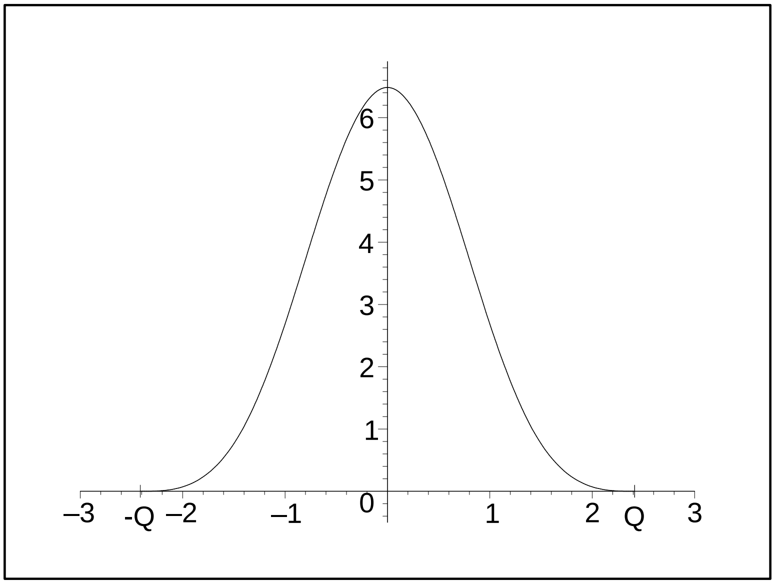

Abbildung 6

Zu welchen Werten $q \in]0,1[$ gibt es nun eine Schilling-Funktion? Erdös zeigte in seiner Arbeit von 1940 (siehe [16]), dass es sehr viele in der Nähe von 1 gibt. Das genaue Ergebnis wird in 4.2.15 bzw. in 4.2.16 angegeben. Um jedoch zu diesen Aussagen zu gelangen, bedarf es einiger Vorüberlegungen. Die folgenden vier Hilfssätze dienen genau dazu. Es handelt sich also mehr oder weniger um rein technische Überlegungen. Diese sind jedoch durchaus trickreich und alles andere als uninteressant. Da die vier Hilfssätze sukzessive aufeinander aufbauen sei es aber $\substack{\text{dem}\\\text{der}}$ Les$\substack{\text{er}\\\text{erin}}$ überlassen, wie weit $\substack{\text{er}\\\text{sie}}$ sich in die Details einlesen will.

4.2.8 Definition. *Seien $\gamma_1, \gamma_2 \in \mathbb{R}, \gamma_1, \gamma_2 > 0$. Für alle $M \in \mathbb{R}, M > \gamma_2$ und $N \in \mathbb{N}$ erfülle ein N-Tupel $(c_1, c_2, \ldots, c_N) \in \mathbb{N}^N$ genau dann die Bedingungen (i)-(v), wenn gilt:*

(i) $0 < c_1 \le 2$

(ii) $c_i < c_{i+1}$ *für* $i = 1, \ldots, N-1$

(iii) $c_{i+1} < 3c_i$ *für* $i = 1, \ldots, N-1$

(iv) $c_N \le M$

(v) $\exists\, \alpha \in]\sqrt{2}, 2[$ *mit* $|c_{i+1} - \alpha c_i| < 2$ *für* $i = 1, \ldots, N-1$ *und*

$$\#\{i = 1, \ldots, N-1 \,:\, |c_{i+1} - \alpha c_i| > \frac{1}{10}\} < \gamma_1 \log(M).$$

4.2.9 Hilfssatz. *Es gibt zwei absolute Konstanten $\gamma_1, \gamma_2 \in \mathbb{R}_{>0}$, so dass für alle $M \in \mathbb{R}$, $M > \gamma_2$ und für alle $N \in \mathbb{N}$ gilt:*

$$\#\{(c_1, \ldots, c_N) \in \mathbb{N}^N \,:\, (c_1, \ldots, c_N) \text{ erfüllen (i)-(v)}\} < [\sqrt[4]{M}].$$

4.2.10 Bemerkung. *Man kann* $\gamma_1 = 0.001$ *und* $\gamma_2 = e^{32}$ *wählen.*

Beweis. Um die Anzahl der N-Tupel $(c_1, \ldots, c_N)$, die (i)-(v) erfüllen, abzuschätzen, müssen wir untersuchen, wie solche N-Tupel aufgebaut sind. Betrachten wir zuerst c_1 und c_2:

Für c_1 gibt es wegen (i) nur 2 Möglichkeiten, nämlich $c_1 = 1$ oder $c_2 = 2$. Ist $c_1 = 1$, dann muss $c_2 > 1$ (Bedingung (ii)) und $c_2 < 3$ (Bedingung (iii)) sein. Es bleibt also nur $c_2 = 2$ übrig. Ist jedoch $c_1 = 2$, so muss (wegen (ii) und (iii)) $2 < c_2 < 6$ sein. Es gibt also 3 Möglichkeiten für c_2, nämlich, $c_2 = 3, c_2 = 4$ oder $c_2 = 5$. Alle N-Tupel, die (i)-(v) erfüllen beginnen also auf eine der vier folgenden Arten:

1. $(1, 2, c_3, c_4, \ldots)$
2. $(2, 3, c_3, c_4, \ldots)$
3. $(2, 4, c_3, c_4, \ldots)$
4. $(2, 5, c_3, c_4, \ldots)$.

Doch wie geht es weiter? Um das zu klären, benötigen wir die Bedingungen (iv) und (v).

Seien $j_1, j_2, \ldots, j_l$ jene l Indizes unter den $N-1$ Indizes $1 \leq i \leq N-1$, die die Ungleichung

$$|c_{i+1} - \alpha c_i| > \frac{1}{10}$$

efüllen. Also $|c_{j_r+1} - \alpha c_{j_r}| > \frac{1}{10}$ für ein $r = 1, \ldots, l$. (Beachte: $l < \gamma_1 \log(M)$.) Wir unterscheiden zwei Fälle:

1. Fall: Für alle Indizes $i, 3 \leq i \leq N-1$, die **nicht** die Form $i = j_r + 1$ oder $i = j_r + 2$ für ein $r = 1, 2, \ldots, l$ haben gilt (aufgrund der Definition der j_r):

$$|c_{i-1} - \alpha c_{i-2}| \leq \frac{1}{10} \quad \text{und} \quad |c_i - \alpha c_{i-1}| \leq \frac{1}{10}.$$

Damit gilt weiters:

$$|\frac{c_{i-1}}{c_{i-2}} - \alpha| \leq \frac{1}{10 c_{i-2}}.$$

Mit (iii) erhalten wir daraus:

$$|\frac{c_{i-1}^2}{c_{i-2}} - \alpha c_{i-1}| = c_{i-1}|\frac{c_{i-1}}{c_{i-2}} - \alpha| \leq \frac{c_{i-1}}{10 c_{i-2}} < \frac{3 c_{i-2}}{10 c_{i-2}} = \frac{3}{10}.$$

Aufgrund dieser Ungleichung und da wie gefordert auch $|c_i - \alpha c_{i-1}| \leq \frac{1}{10}$ ist, gilt schließlich:

$$|\frac{c_{i-1}^2}{c_{i-2}} - c_i| = |\frac{c_{i-1}^2}{c_{i-2}} - \alpha c_{i-1} + \alpha c_{i-1} - c_i| \leq |\frac{c_{i-1}^2}{c_{i-2}} - \alpha c_{i-1}| + |c_i - \alpha c_{i-1}| \leq \frac{3}{10} + \frac{1}{10} < \frac{1}{2}.$$

Es muss also c_i die nächstgelegene natürliche Zahl von $\frac{c_{i-1}^2}{c_{i-2}}$ sein und ist damit eindeutig bestimmt. Mit der Notation aus 4.1 ist also

$$c_i = E(\frac{c_{i-1}^2}{c_{i-2}}).$$

2. Fall: Ist andererseits ein Index $i, 3 \leq i \leq N-1$ von der Form $i = j_r + 1$ oder von der Form $i = j_r + 2$, dann ist c_i nicht notwendigerweise eindeutig durch c_{i-2} und c_{i-1} bestimmt.

Ist c_{i-1} schon festgelegt (und $i = j_r + 1$ oder $i = j_r + 2$), so folgt aus $|c_i - \alpha c_{i-1}| < 2$ (Bedingung (v)):

$$\left.\begin{array}{ll} c_i > \alpha c_{i-1}: & c_i - \alpha c_{i-1} < 2 \Rightarrow c_i < \alpha c_{i-1} + 2 \\ c_i < \alpha c_{i-1}: & \alpha c_{i-1} - c_i < 2 \Rightarrow \alpha c_{i-1} - 2 < c_i \end{array}\right\} \Rightarrow c_i \in]\alpha c_{i-1} - 2, \alpha c_{i-1} + 2[.$$

Es gibt also in diesem Fall höchstens 4 Möglichkeiten für c_i.

Zusammenfassend: Für den Anfang (c_1 und c_2) gibt es 4 Möglichkeiten. Dann hängt alles von den Ausnahme-Indizes $j_r, 1 \le r \le l$, ab: c_i (für $3 \le i \le N-1$) ist eindeutig festgelegt, falls i **nicht** von der Form $i = j_r + 1$ oder $i = j_r + 2$ ist, sonst gibt es höchstens 4 Möglichkeiten für c_i.

(Konkretes Beispiel: $l = 2, j_1 = 3, j_2 = 6$. Für c_1, c_2 gibt es die 4 oben angeführten Möglichkeiten. Da weder c_1 noch c_2 ein Ausnahme-Index ist, ist c_3 eindeutig festgelegt. Hingegen ist c_3 ein Ausnahme-Index und so gibt es (siehe 2. Fall) jeweils 4 Möglichkeiten für c_4 und c_5. Für $N = 5$ gäbe es also mit $j_1 = 3$ genau 4^3 mögliche 5-Tupel, die (i)-(v) erfüllen. Dazu noch eine Tabelle zur Veranschaulichung:

N-Tupel :	c_1	c_2	c_3	c_4	c_5	c_6	c_7	c_8	c_9	...
Möglichkeiten für c_i :	2	3	1	4	4	1	4	4	1	...
Mögliche N-Tupel bis c_i :	2	4	4	4^2	4^3	4^3	4^4	4^5	4^5	...)

Aus den obigen Überlegungen können wir also ableiten, wieviele N-Tupel es zu gegebenen Ausnahme-Indizes geben kann: Für c_1 und c_2 gibt es, wie gesagt, 4 Möglichkeiten und bei jedem Ausnahme-Index kommen nocheinmal höchsten 4^2 dazu. Für l Ausnahme-Indizes gibt es also höchstens 4^{2l+1} verschiedene N-Tupel mit diesen Ausnahme-Indizes.

Nun müssen wir noch die Anzahl der möglichen unterschiedlichen Wahlen für eine Menge von Ausnahme-Indizes bestimmen: Es gibt $\binom{N}{0}$ mögliche Wahlen für keinen Ausnahme-Index, $\binom{N}{1}$ für einen, $\binom{N}{2}$ für zwei, usw. Wir kommen also, weil die Anzahl der Ausnahme-Indizes kleiner als $\gamma_1 \log(M)$ ist (Bedingung (v)), auf:

$$\binom{N}{0} + \binom{N}{1} + \ldots + \binom{N}{[\gamma_1 \log(M)]}.$$

Doch wir wollen noch das N in dieser Summe los werden. Dazu brauchen wir eine Hilfsüberlegung: Es gilt für alle $i, 1 \le i \le N-1$:

1. Fall: Ist $c_{i+1} > \alpha c_i$, dann ist $c_{i+1} > \alpha c_i > \alpha c_i - 2$.

2. Fall: Ist andererseits $c_{i+1} < \alpha c_i$, dann ist wegen (v) $\alpha c_i - c_{i+1} < 2$ und damit $c_{i+1} > \alpha c_i - 2$.

Damit gilt für alle $i, 1 \le i \le N-1$:

$$c_{i+1} > \alpha c_i - 2.$$

Wenden wir dies wiederholt auf c_N an, erhalten wir, da $\alpha \in]\sqrt{2}, 2[$ und $c_6 > 6$ (Bedingung (ii)) ist:

$$c_N > \alpha c_{N-1} - 2 > \alpha^2 c_{N-2} - 2\alpha - 2 > \ldots > \alpha^{N-6} c_6 - 2 \sum_{k=0}^{N-7} \alpha^k =$$

$$= \alpha^{N-6} c_6 - 2 \frac{\alpha^{N-6} - 1}{\alpha - 1} = \alpha^{N-6}(c_6 - \frac{2}{\alpha - 1}) > \alpha^{N-6}(c_6 - \frac{2}{\underbrace{\alpha - 1}_{<5}}) > \alpha^{N-6}.$$

Mit der Bedingung (iv), also $c_N \leq M$, folgt damit:

$$\begin{aligned} \alpha^{N-6} &< c_N \leq M \\ (N-6)\log(\alpha) &< \log(M) \\ N &< \frac{\log(M)}{\log(\alpha)} + 6 < \frac{\log(M)}{\log(\sqrt{2})} + 6 < 3\log(M) + 6. \end{aligned}$$

Setzen wir $\gamma_2 := e^{32} > e^6$ so gilt, weil $M > \gamma_2 > e^6$ ist (und damit $6 < \log(M)$):

$$N < 3\log(M) + 6 < 4\log(M).$$

Wie bereits oben festgestellt, kann damit die Anzahl der möglichen unterschiedlichen Wahlen für eine Menge von Ausnahme-Indizes nicht größer sein als:

$$\binom{[4\log(M)]}{0} + \binom{[4\log(M)]}{1} + \ldots + \binom{[4\log(M)]}{[\gamma_1 \log(M)]}.$$

Mit 5.5.3 gilt aber für $0 < r < 1$:

$$\sum_{k=0}^{[\gamma_1 \log(M)]} \binom{[4\log(M)]}{k} \leq r^{-[\gamma_1 \log(M)]} \cdot \frac{(1+r)^{[4\log(M)]}}{1-r}.$$

Sei $\frac{1}{1000} < r < \frac{1}{100}$ und $\gamma_1 := \frac{1}{1000}$, dann gilt:

$$\begin{aligned} 4\log(1+r) &< 4\log(1+0.01) < 4\log(1+e^{\frac{1}{96}}-1) = \frac{4}{96} = \frac{1}{24} \\ -\gamma_1 \log(r) &< -0.001\log(0.001) < -\frac{1}{-24\log(0.001)}\log(0.001) = \frac{1}{24} \\ -\frac{1}{\log(M)}\log(1-r) &< -\frac{1}{\log(M)}\log(1-0.01) < \frac{1}{\log(M)} \cdot \frac{1}{10} < \frac{1}{10\log(\gamma_2)} = \frac{1}{320} < \frac{1}{24} \end{aligned}$$

Es gilt weiters:

$$\begin{aligned} & 4\log(1+r) - \gamma_1 \log(r) - \frac{1}{\log(M)}\log(1-r) < \frac{1}{24} + \frac{1}{24} + \frac{1}{24} = \frac{1}{8} \\ \Rightarrow\ & 4\log(M)\log(1+r) - \gamma_1 \log(M)\log(r) - \log(1-r) < \frac{1}{8}\log(M) \\ \Rightarrow\ & r^{-[\gamma_1 \log(M)]} \cdot \frac{(1+r)^{[4\log(M)]}}{1-r} \leq r^{-\gamma_1 \log(M)} \cdot \frac{(1+r)^{4\log(M)}}{1-r} < \sqrt[8]{M}. \end{aligned}$$

Es gilt also:

$$\sum_{k=0}^{[\gamma_1 \log(M)]} \binom{[4\log(M)]}{k} < \sqrt[8]{M}.$$

Wie oben gezeigt gibt es höchstens 4^{2l+1} verschiedene N-Tupel $(c_1, \ldots, c_N)$ für eine gegebene Menge von Ausnahme-Indizes. Es folgt, dass die Anzahl der verschiedenen N-Tupel $(c_1, \ldots, c_N)$, die (i)-(v) erfüllen, kleiner ist als (wir verwenden noch einmal die Beziehungen $\gamma_1 = 0.001, \gamma_2 < M$, also $\sqrt[16]{M} > \sqrt[16]{\gamma_2} = e^2 > 4$):

$$\begin{aligned} & \sqrt[8]{M} \cdot 4^{2l+1} < \sqrt[8]{M} \cdot 4^{2\gamma_1 \log(M)+1} < M^{\frac{1}{8}} \cdot 4 \cdot M^{0.002\log(4)} < \\ & \qquad < M^{\frac{1}{8}} \cdot e^2 \cdot M^{\frac{1}{16}} < M^{\frac{1}{8}} \cdot M^{\frac{1}{16}} \cdot M^{\frac{1}{16}} = \sqrt[4]{M}. \end{aligned}$$

[16] ☺

4.2.11 Hilfssatz. *Seien γ_1, γ_2 wie in 4.2.9. Es gibt ein $\gamma_3 > \gamma_2$ mit folgender Eigenschaft: Setzt man für $M > \gamma_3$*

$$N = N(M) := [\frac{\log(2M-1) - \log(4)}{\log(2)}] < \frac{\log(2M-1) - \log(4)}{\log(2)},$$

und wählt man für $a \in]\sqrt{2}, 2[$ ein

$$\mu = \mu(a) \in]1, 2[\text{ mit } \frac{1}{a(a-1)} < \mu < \frac{5}{2a},$$

so gilt für die Menge

$$\Gamma := \{a \in]\sqrt{2}, 2[: \#\{k \in \mathbb{N} : 1 \le k \le N, |\varepsilon(\mu a^k)| > \frac{1}{30}\} < \frac{1}{2}\gamma_1 \log(M)\}.$$

die Ungleichung:

$$\lambda(\Gamma) < \frac{1}{\sqrt{M}}.$$

4.2.12 Bemerkung. *Man kann $\gamma_3 := 71^8$ setzen.*

Beweis. Der Beweis erfolgt indirekt. Wir nehmen also an, die Behauptung ist falsch. Dann ist $\lambda(\Gamma) \ge \frac{1}{\sqrt{M}}$ und nach 5.3.2 gibt es wegen $\lambda(\Gamma) > \frac{1}{\sqrt{M}} - \frac{1}{2\sqrt[4]{M}^3}$ mindestens $[\sqrt[4]{M}]$ Werte

$$a_1, \ldots, a_{[\sqrt[4]{M}]} \in]\sqrt{2}, 2[\cap \Gamma$$

mit

$$|a_j - a_k| \ge \frac{\frac{1}{\sqrt{M}} - \frac{1}{2\sqrt[4]{M}^3}}{[\sqrt[4]{M}] - 1} \ge \frac{1}{\sqrt[4]{M}^3} \quad \text{für} \quad k \ne j.$$

Weiters wählen wir zu jedem $a_j, j = 1, \ldots, [\sqrt[4]{M}]$ ein $\mu = \mu(a) \in]1, 2[\cap]\frac{1}{a(a-1)}, \frac{5}{2a}[$. Dies ist möglich, da gilt:

$$\begin{aligned} 1.4 = \frac{7}{5} < \sqrt{2} < a \quad &\Rightarrow \quad 7 < 5a \\ &\Rightarrow \quad 2 < 5a - 5 \\ &\Rightarrow \quad \frac{2}{a-1} < 5 \\ &\Rightarrow \quad \frac{1}{a-1} < \frac{5}{2} \Rightarrow \frac{1}{a(a-1)} < \frac{5}{2a}. \end{aligned}$$

und wegen $a > \sqrt{2}$ ist $\frac{1}{a(a-1)} < 2$, ebenso ist $\frac{5}{2a} > 1$ wegen $a < 2$.

Außerdem ist jedes $a_j \in \Gamma, j = 1, \ldots, [\sqrt[4]{M}]$, und daher gilt:

$$\varepsilon(\mu(a_j) a_j^k) < \frac{1}{30}$$

für jedes $k, 1 \le k \le N$, mit Ausnahme von höchstens $\frac{1}{2}\gamma_1 \log(M)$ vielen. Wir schreiben (siehe 4.1)

$$\mu(a_j) a_j^k = E(\mu(a_j) a_j^k) + \varepsilon(\mu(a_j) a_j^k) =: E_k^{(j)} + \varepsilon_k^{(j)}$$

und zeigen folgende zwei Punkte.

(I) Für jedes $j = 1, \ldots, [\sqrt[4]{M}]$ erfüllt das N-Tupel $(E_1^{(j)}, \ldots, E_N^{(j)})$ die fünf Bedingungen (i)-(v).

(II) Für $i \neq j$ sind die N-Tupel $(E_1^{(i)}, \ldots, E_N^{(i)})$ und $(E_1^{(j)}, \ldots, E_N^{(j)})$ verschieden.

Mit (I) und (II) gibt es also $[\sqrt[4]{M}]$ verschiedene N-Tupel die (i)-(v) erfüllen. Dies ist jedoch ein Widerspruch zu 4.2.9, wo wir gezeigt haben, dass es weniger als $[\sqrt[4]{M}]$ solcher N-Tupel gibt, und der Beweis ist gelungen.

(I) Wir zeigen, dass $(E_1^{(j)}, \ldots, E_N^{(j)})$ die Bedingungen (i)-(v) für jedes $j = 1, \ldots, [\sqrt[4]{M}]$ erfüllt:

(i) Wir wollen überprüfen ob $1 \leq E(\mu a) \leq 2$ ist. Da $a > 1, \mu(a) > 1$ gilt, ist auch $\mu a > 1$ und damit

$$E(\mu a) \geq 1.$$

Weiters gilt:

$$\mu < \frac{5}{2a} \Rightarrow \mu a < \frac{5}{2} = 2.5 \Rightarrow E(\mu a) \leq 2.$$

Insgesamt folgt also

$$1 \leq E(\mu a) \leq 2$$

und Bedingung (i) ist erfüllt.

(ii) Wir wollen überprüfen ob $E(\mu a^{k+1}) > E(\mu a^k)$ ist. Es gilt für $k \geq 1$:

$$\begin{aligned}
\frac{1}{a(a-1)} < \mu \quad &\Rightarrow \quad \mu a^2 - \mu a > 1 \\
&\Rightarrow \quad \mu a^2 - \frac{1}{2} > \mu a + \frac{1}{2} \\
&\Rightarrow \quad \underbrace{\mu a^{k+1} - \frac{1}{2}}_{\leq E(\mu a^{k+1})} > \underbrace{\mu a^k + \frac{1}{2}}_{\geq E(\mu a^k)} \Rightarrow E(\mu a^{k+1}) > E(\mu a^k).
\end{aligned}$$

Damit ist auch Bedingung (ii) erfüllt.

(iii) Wir wollen überprüfen ob $E(\mu a^{k+1}) < 3E(\mu a^k)$ ist. Es gilt für $k \geq 1$ und da $\mu > 1$ ist:

$$\begin{aligned}
1 < \sqrt{2} < a < 2 \quad &\Rightarrow \quad (a-1)(a-2) < 0 \\
&\Rightarrow \quad a^2 - 3a + 2 < 0 \\
&\Rightarrow \quad a^2 - 3a < -2 \\
&\Rightarrow \quad \mu a^2 - 3\mu a < -2\mu < -2 \\
&\Rightarrow \quad \mu a^{k+1} - 3\mu a^k < -2a^{k-1} < -2 \\
&\Rightarrow \quad \underbrace{\mu a^{k+1} + \frac{1}{2}}_{\geq E(\mu a^{k+1})} < 3\mu a^k - \frac{3}{2} = 3(\underbrace{\mu a^k - \frac{1}{2}}_{\leq E(\mu a^k)}) \Rightarrow E(\mu a^{k+1}) < 3E(\mu a^k).
\end{aligned}$$

Somit ist Bedingung (iii) erfüllt.

(iv) Wir wollen überprüfen ob $E_N^{(j)} < M$ erfüllt ist. Es gilt für jedes $j = 1, \dots, [\sqrt[4]{M}]$:

$$\begin{aligned}
N \quad &\leq \quad \frac{\log(2M-1) - \log(4)}{\log(2)} = \frac{\log(\frac{M-1/2}{2})}{\log(2)} < \frac{\log(\frac{M-1/2}{\mu(a_j)})}{\log(a_j)} \\
&\Rightarrow \quad N\log(a_j) < \log(\frac{M-\frac{1}{2}}{\mu(a_j)}) \\
&\Rightarrow \quad N\log(a_j) + \log(\mu(a_j)) < \log(M - \frac{1}{2}) \\
&\Rightarrow \quad \log(\mu(a_j)a_j^N) < \log(M - \frac{1}{2}) \\
&\Rightarrow \quad \mu(a_j)a_j^N < M - \frac{1}{2} \Rightarrow E(\mu(a_j)a_j^N) = E_N^{(j)} < M.
\end{aligned}$$

Damit ist auch die Bedingung (iv) erfüllt.

(v) Um noch die letzten Eigenschaften nachzuweisen beachten wir, dass

$$\sqrt{2} < a_j < 2, j = 1, \dots, [\sqrt[4]{M}],$$

ist. Damit gilt:

$$\begin{aligned}
|E_{l+1}^{(j)} - a_j E_l^{(j)}| &= |E_{l+1}^{(j)} + \varepsilon_{l+1}^{(j)} - \varepsilon_{l+1}^{(j)} - a_j E_l^{(j)}| = |\mu(a_j)a_j^{l+1} - \varepsilon_{l+1}^{(j)} - a_j E_l^{(j)}| = \\
&= |(\mu(a_j)a_j^l)a_j - \varepsilon_{l+1}^{(j)} - a_j E_l^{(j)}| = |(E_l^{(j)} + \varepsilon_l^{(j)})a_j - \varepsilon_{l+1}^{(j)} - a_j E_l^{(j)}| = |a_j \varepsilon_l^{(j)} - \varepsilon_{l+1}^{(j)}| \leq \\
&\leq |a_j| \cdot |\varepsilon_l^{(l)}| + |\varepsilon_{l+1}^{(j)}| < 2 \cdot \frac{1}{2} + \frac{1}{2} < 2.
\end{aligned}$$

Mit $\alpha = a_j$ ist somit der erste Teil von (v) erfüllt.

Um die restliche Forderung von 4.2.9 zu erfüllen, beachten wir dass es höchstens

$$\frac{1}{2}\gamma_1 \log(M)$$

Werte für $1 \leq k \leq N$ gibt, für die $|\varepsilon(\mu(a_j)a_j^k)| > \frac{1}{30}$ gilt. Also:

$$\#\{k \in \mathbb{N} \,:\, 1 \leq k \leq N, |\varepsilon(\mu(a_j)a_j^k)| > \frac{1}{30}\} < \frac{1}{2}\gamma_1 \log(M).$$

Daraus folgt

$$\#\{l \in \mathbb{N} \,:\, 1 \leq l \leq N-1, |\varepsilon(\mu(a_j)a_j^l)| > \frac{1}{30} \text{ oder } |\varepsilon(\mu(a_j)a_j^{l+1})| > \frac{1}{30}\} < \gamma_1 \log(M).$$

Gehört jetzt l **nicht** zu diesen Ausnahme Indizes, dann gilt:

$$\varepsilon_l^{(j)} < \frac{1}{30} \text{ und } \varepsilon_{l+1}^{(j)} < \frac{1}{30}.$$

Und weil $\sqrt{2} < a_j < 2$ ist, folgt:

$$|E_{l+1}^{(j)} - a_j E_l^{(j)}| = \underset{\cdots}{\text{wie oben}} = |a_j \varepsilon_l^{(j)} - \varepsilon_{l+1}^{(j)}| \leq |a_j| \cdot |\varepsilon_l^{(j)}| + |\varepsilon_{l+1}^{(j)}| < 2 \cdot \frac{1}{30} + \frac{1}{30} = \frac{1}{10}.$$

Also gibt es höchstens $\gamma_1 \log(M)$ Indizes für die $|E_{l+1}^{(j)} - a_j E_l^{(j)}| > \frac{1}{10}$ ist, das heißt

$$\#\{l \in \mathbb{N} \,:\, 1 \leq l \leq N, |E_{l+1}^{(j)} - a_j E_l^{(j)}| > \frac{1}{10}\} < \gamma_1 \log(M).$$

Damit ist schließlich die Bedingung (v) erfüllt und wir haben (I) gezeigt.

(II) Um diesen Punkt zu zeigen, nehmen wir an, dass die Behauptung nicht stimmt, dass also mindestens zwei der konstruierten N-Tupel gleich sind. Das heißt es gibt $j, k, j \neq k$, so dass für alle $l = 1, \ldots, N$

$$E_l^{(j)} = E_l^{(k)}$$

ist. Damit gilt

$$\begin{aligned} |\mu(a_k)a_k^l - \mu(a_j)a_j^l| = |E_l^{(k)} + \varepsilon_l^{(k)} - E_l^{(j)} - \varepsilon_l^{(j)}| = \\ = |\varepsilon_l^{(k)} - \varepsilon_l^{(j)}| \leq |\varepsilon_l^{(k)}| + |\varepsilon_l^{(j)}| < \frac{1}{2} + \frac{1}{2} < 2 \quad (*) \end{aligned}$$

für alle l mit $1 \leq l \leq N$. Oder anders ausgedrückt: Für alle l mit $\mu(a_k)a_k^l < M$. Also speziell für l mit

$$\frac{1}{4}M > a_k^l > \frac{1}{10}M. \quad (**)$$

Ohne Beschränkung der Allgemeinheit können wir annehmen, dass $a_k > a_j$ ist (sonst ist $a_j > a_k$) und da $|a_k - a_j| \geq \frac{1}{\sqrt[4]{M}^3}$ ist gilt dann:

$$a_k \geq a_j + \frac{1}{\sqrt[4]{M}^3}.$$

Damit, mit $(*)$ und $(**)$ gilt für $1 \leq l \leq N-1$:

$$\begin{aligned} a_k^{l+1}\mu(a_k) = a_k^l\mu(a_k)a_k \geq a_k^l\mu(a_k)(a_j + \frac{1}{\sqrt[4]{M}^3}) \geq \\ \geq (a_j^l\mu(a_j) - 2)(a_j + \frac{1}{\sqrt[4]{M}^3}) = a_j^{l+1}\mu(a_j) + \underbrace{a_j^l\mu(a_j)}_{>a_k^l\mu(a_k)-2>\frac{1}{10}M-2}\frac{1}{\sqrt[4]{M}^3}) - 2(a_j + \frac{1}{\sqrt[4]{M}^3}) \geq \\ \geq a_j^{l+1}\mu(a_j) + \frac{1}{10}\sqrt[4]{M} - 2\underbrace{\frac{1}{\sqrt[4]{M}^3}}_{<1} - 2(a_j + \frac{1}{\sqrt[4]{M}^3}) = a_j^{l+1}\mu(a_j) + \frac{1}{10}M^{\frac{1}{4}} - 4M^{-\frac{3}{4}} - 2a_j. \end{aligned}$$

Setzen wir $\gamma_3 := 71^8 > 71^4$, so gilt für $M > \gamma_3$:

$$\begin{aligned} M > 71^4 \quad &\Rightarrow \quad \sqrt[4]{M} > 71 \\ &\Rightarrow \quad M > 71M^{\frac{3}{4}} = 70M^{\frac{3}{4}} + M^{\frac{3}{4}} > 70M^{\frac{3}{4}} + 40 \\ &\Rightarrow \quad \frac{1}{10}M > 7M^{\frac{3}{4}} + 4 \\ &\Rightarrow \quad \frac{1}{10}M^{\frac{1}{4}} - 4M^{-\frac{3}{4}} > 7 = 3 + 4 > 3 + 2a_j \\ &\Rightarrow \quad \frac{1}{10}M^{\frac{1}{4}} - 4M^{-\frac{3}{4}} - 2a_j > 3. \end{aligned}$$

Mit den letzten zwei Abschätzungen folgt also:

$$a_k^{l+1}\mu(a_k) > a_j^{l+1}\mu(a_j) + \frac{1}{10}M^{\frac{1}{4}} - 4M^{-\frac{3}{4}} - 2a_j > a_j^{l+1}\mu(a_j) + 3.$$

Damit ist aber

$$|a_k^{l+1}\mu(a_k) - a_j^{l+1}\mu(a_j)| \geq 3,$$

ein Widerspruch zu

$$|a_k^{l+1}\mu(a_k) - a_j^{l+1}\mu(a_j)| < 2$$

(Ungleichung $(*)$). Es muss also (II) gelten.

Noch einmal zusammenfassend: Wir haben $[\sqrt[4]{M}]$ N-Tupel konstruiert und in (I) nachgewiesen, dass sie die Bedingungen (i)-(v) erfüllen. In (II) haben wir gezeigt, dass diese N-Tupel alle verschieden sind. Damit gibt es $[\sqrt[4]{M}]$ verschiedene N-Tupel, die (i)-(v) erfüllen. Dies ist aber nach 4.2.9 nicht möglich. Damit muss also, entgegen unserer Annahme, der Hilfssatz richtig sein. [16] ☺

4.2.13 Hilfssatz. *Seien $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$ wie in 4.2.11. Dann gibt es eine Nullmenge $Z \subseteq]\sqrt{2}, 2[$ mit der folgenden Eigenschaft: Ist $a \in]\sqrt{2}, 2[$ und $a \notin Z$, dann gibt es ein $\beta = \beta(a) > \gamma_3$, so dass es für jedes $M > \beta$ und für jedes $\mu \in]1, 2[$* **mindestens** *$\frac{1}{4}\gamma_1 \log(M)$ Werte für $k \in \mathbb{N}$ gibt, die*

$$\begin{aligned} &(a) \qquad \mu a^k < M \\ &(b) \qquad |\varepsilon(\mu a^k)| > \frac{1}{30} \end{aligned}$$

erfüllen.

Beweis. Für $h \in \mathbb{N}_{>0}$ sei

$$M = 2^h, \quad N = N(M) := [\frac{\log(2M-1) - \log(4)}{\log(2)}], \quad \mu = \mu(a) \in]1, 2[\cap]\frac{1}{a(a-1)}, \frac{5}{2a}[,$$

und die Menge Γ_h definiert durch:

$$\Gamma_h := \{a \in]\sqrt{2}, 2[: \#\{k \in \mathbb{N} : 1 \leq k \leq N(M), |\varepsilon(\mu a^k)| > \frac{1}{30}\} < \frac{1}{2}\gamma_1 \log(M)\}.$$

Dann ist wegen 4.2.11 für $M = 2^h > \gamma_3$:

$$\lambda(\Gamma_h) < \frac{1}{\sqrt{2}^h}.$$

Ist nun $\nu > \gamma_3$, so sei

$${}_\nu\Gamma := \bigcup_{2^h > \nu} \Gamma_h.$$

Sei $\gamma_\nu := [\frac{\log(\nu)}{\log(2)}]$, dann gilt für $h \geq \gamma_\nu$:

$$2^h \geq 2^{\gamma_\nu} > 2^{\frac{\log(\nu)}{\log(2)}} = \nu^{\frac{\log(2)}{\log(2)}} = \nu$$

und es folgt:

$$\lambda({}_\nu\Gamma) < \sum_{h=\gamma_\nu}^{\infty} (\frac{1}{\sqrt{2}})^h = \frac{1}{\sqrt{2}^{\gamma_\nu}}(2 + \sqrt{2}) < \frac{4}{\sqrt{2}^{\gamma_\nu}}.$$

Ist nun $a \in]\sqrt{2}, 2[, a \notin {}_\nu\Gamma$, dann gibt es kein h mit $2^h > \nu$, so dass $a \in \Gamma_h$ ist. Das heißt es gibt kein h mit $2^h = M > \nu$, so dass

$$\#\{k \in \mathbb{N} : 1 \leq k \leq N(M), |\varepsilon(\mu a^k)| > \frac{1}{30}\} < \frac{1}{2}\gamma_1 \log(M)$$

ist. Das heißt für alle h mit $2^h > \nu$ ist

$$\#\{k \in \mathbb{N} : 1 \le k \le N(M), |\varepsilon(\mu a^k)| > \frac{1}{30}\} \ge \frac{1}{2}\gamma_1 \log(M) > \frac{1}{4}\gamma_1 \log(M).$$

Für $k \le N(M)$ gilt weiters

$$N(M) > \frac{1}{4}\gamma_1 \log(M) \text{ und } \mu a^k < M$$

(siehe 4.2.11,(iv)). Ist also $a \notin {}_\nu\Gamma$, dann gibt es ein $\beta = \beta(a) := \nu > \gamma_3$, das die Bedingungen des Hilfssatzes erfüllt. Dabei gilt diese Überlegung für alle $\nu > \gamma_3$ (siehe oben: „…für alle h mit $2^h > \nu \ldots$). Damit ist die Menge der Punkte $a \in]\sqrt{2}, 2[$, so dass es kein solches β gibt, dies sei die Menge Z, eine Teilmenge von ${}_\nu\Gamma$ für jedes $\nu > 0$. Es gilt aber

$$\lim_{\nu\to\infty} \lambda({}_\nu\Gamma) \le \lim_{\nu\to\infty} \frac{4}{\sqrt{2}^{\gamma_\nu}} = 0.$$

Da also $Z \subseteq {}_\nu\Gamma$ ist für alle ν, ist Z eine Nullmenge. [16] ☺

4.2.14 Hilfssatz. *Für jedes $p > 0$ gibt es ein $\varrho = \varrho(p) > 1$ und eine Nullmenge $Z_p \subseteq]1, \varrho[$ mit der Eigenschaft: Ist $a \in]1, \varrho[$ und $a \notin Z_p$, dann gibt es ein $\alpha = \alpha(a) > 0$, so dass es für $M > \alpha$ und jedes $\mu \in]1, 2[$ mindestens $p \log(M)$ Werte für k gibt mit:*

$$\begin{array}{ll} (a) & \mu a^k < M \\ (b) & |\varepsilon(\mu a^k)| > \dfrac{1}{30}. \end{array}$$

Beweis. Sei $a \in]1, \varrho[$, so dass es kein $n \in \mathbb{N}$ gibt mit $a^n \in Z$, wobei Z die Nullmenge aus 4.2.13 ist. Seien weiters $p_1, p_2, \ldots, p_r$ jene Primzahlen, für die

$$a^{\frac{x}{2}} = \sqrt{2} < a^{p_1} < a^{p_2} < \ldots < a^{p_r} < 2 = a^x$$

gilt. Für $x \in \mathbb{R}$ mit $a^x = 2$ (also $x = \frac{\log(2)}{\log(a)}$) gibt es aufgrund der Ungleichung von Tschebyscheff (siehe 5.5.4) zwei Konstanten $\gamma_4, \gamma_5 \in \mathbb{R}$ mit:

$$\gamma_4 \frac{x}{\log(x)} > r > \gamma_5 \frac{x}{\log(x)}. \quad (*)$$

Da $a^{p_j} \in]\sqrt{2}, 2[$ und $a^{p_j} \notin Z$ für $j = 1, \ldots, r$ ist, gibt es nach 4.2.13 für jedes $\mu \in]1, 2[$, falls $M > \beta(a^{p_j})$ ist, mindestens $\frac{1}{4}\gamma_1 \log(M)$ Werte für k mit:

$$|\mu(a^{p_j})^k| < M \text{ und } |\varepsilon(\mu(a^{p_j})^k)| > \frac{1}{30}.$$

Ist also $M > \max_{1\le j\le r} \beta(a^{p_j})$, so gibt es für jedes $j, j = 1, 2, \ldots, r$, mindestens $\frac{1}{4}\gamma_1 \log(M)$ Werte für k, die (a) und (b) erfüllen.

Betrachten wir weiters $(a^{p_i p_j})^k$, so gilt für $k < \frac{x \log(M)}{p_i p_j \log(2)}$:

$$\mu(a^{p_i p_j})^k < 2(2^{\frac{p_i p_j}{x}})^k < 2(2^{\frac{p_i p_j}{x}})^{\frac{x \log(M)}{p_i p_j \log(2)}} = 2M.$$

Damit gibt es höchstens $\frac{x \log(M)}{p_i p_j \log(2)}$ Werte für k, so dass

$$(a^{p_i p_j})^k < M$$

ist. Somit gibt es für a mindestens

$$r\frac{1}{4}\gamma_1 \log(M) - \sum_{i=1}^{r}\sum_{j=i}^{r}\frac{x\log(M)}{p_i p_j \log(2)}$$

Werte für k, so dass (a) und (b) erfüllt sind. Es ist mit $(*)$

$$r\frac{1}{4}\gamma_1 \log(M) > \frac{1}{4}\gamma_1\gamma_5\frac{x}{\log(x)}\log(M)$$

und da

$$\sqrt{2} < a^{p_j} < 2 = a^x \text{ also } \frac{1}{2}x < p_j < x$$

für $j = 1, \ldots, r$ ist, gilt:

$$\sum_{i=1}^{r}\sum_{j=i}^{r}\frac{x\log(M)}{p_i p_j \log(2)} < \frac{x\log(M)}{\log(2)}\sum_{i=1}^{r}\sum_{j=1}^{r}\frac{1}{(\frac{1}{2}x)^2} == 4\frac{x\log(M)}{\log(2)}\cdot\frac{r^2}{x^2} <$$
$$< 4\frac{x\log(M)}{\log(2)}\cdot\frac{1}{x^2}\cdot\frac{\gamma_4^2 x^2}{(\log(x))^2} = 4\underbrace{\frac{\gamma_4^2}{\log(2)}}_{=:\gamma_6}\cdot\frac{x}{(\log(x))^2}\log(M).$$

Und damit ist die Anzahl der Werte k, die (a) und (b) erfüllen nicht kleiner als

$$\frac{1}{4}\gamma_1\gamma_5\frac{x}{\log(x)}\log(M) - 4\gamma_6\frac{x}{(\log(x))^2}\log(M).$$

Dieser Ausdruck kann aber größer als $p\log(M)$ gemacht werden, falls x groß genug, also a klein genug, etwa $a < \varrho(p)$, gewählt wird. Damit ist die Behauptung bewiesen, da Z_p definiert werden kann als

$$Z_p := \{a \in]1, \varrho(p)[: \exists\, n \in \mathbb{N} \text{ mit } a^n \in Z\},$$

wobei Z die Nullmenge aus 4.2.13 ist. [16] ☺

4.2.15 Satz. *Für jedes $m \in \mathbb{N}$ gibt es ein $\delta = \delta(m) > 0$, so dass die Menge jener Punkte $a \in]1, 1+\delta[$ für die*

$$\prod_{k=1}^{\infty}\cos(\pi\frac{x}{a^k}) > \frac{1}{|x|^m} \text{ für } x \to \infty$$

gilt, eine Nullmenge ist.

Beweis. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit können wir $x \geq 0$ annehmen (da für alle $x \in \mathbb{R}$ die Beziehung $\cos(-x) = \cos(x)$ gilt). Ist $x \in]a^n, a^{n+1}]$, dann ist

$$\prod_{k=1}^{\infty}\cos(\pi\frac{x}{a^k}) < \prod_{k=1}^{n}\cos(\pi a^k\frac{x}{a^n}).$$

Sei nun $\mu = \frac{x}{a^n}$ so, dass $1 < \mu < 2$ ist. Dann gilt:

$$\prod_{k=1}^{\infty}\cos(\pi\frac{x}{a^k}) < \prod_{k=1}^{n}|\cos(\pi\mu a^k)| = \prod_{\mu a^k \leq x}|\cos(\pi\mu a^k)|.$$

Nach 4.2.14, mit $M = x$, gibt es für $a \in]1, \varrho(p)[, a \notin Z_p$, und für $x > \alpha(a)$, mindestens $p \log(x)$ Faktoren im letzten Produkt mit $|\varepsilon(\mu a^k)| > \frac{1}{30}$. Dann ist aber

$$\cos(\pi \mu a^k) < \cos(\frac{\pi}{30})$$

und es folgt:

$$\prod_{k=1}^{\infty} \cos(\frac{x}{a^k}) < (\cos(\frac{\pi}{30}))^{p\log(x)} \text{ für } x > \alpha(a)$$

ist. Da nach 4.2.14 $p > 0$ beliebig gewählt werden kann, schließt dies den Beweis ab. [16] ☺

Mit diesem Ergebnis von Erdös kamen dann Derfel und Schilling zu folgender Aussage über die Schilling'sche Funktionalgleichung.

4.2.16 Folgerung. *Es gibt eine Folge $(\beta_k)_{k\in\mathbb{N}}$ mit $\beta_k \in]\frac{1}{2}, 1[$ und $\lim_{k\to\infty} \beta_k = 1$, so dass es für fast alle $q \in]\beta_k, 1[$ eine L^1-Lösung von (1) gibt, die $2(k-1)$ mal differenzierbar ist.*

Beweis. Die Behauptung folgt aus 4.2.15. Es gibt nämlich eine Folge $(\beta_k)_{k\in\mathbb{N}}$ mit

$$\lim_{k\to\infty} \beta_k = 1,$$

so dass die Menge jener Punkte $q \in]\beta_k, 1[$, für die die Bedingung

$$\prod_{k=0}^{\infty} \cos(\frac{1}{2} x q^k) = o(|x|^{-k}) \quad p \to \infty$$

nicht hält, eine Nullmenge ist. Der Rest folgt, da für $f, f' \in L^1$ gilt $\widehat{f'} = x\widehat{f}$. [14] ☺

Dieses Ergebnis von Erdös bringt schon einiges. Noch mehr erhalten wir aber auf ganz anderem Wege.

Im Folgenden betrachten wir den Folgenraum

$$\Omega := \{1, 2, \ldots, m\}^{\mathbb{N}}.$$

Eine Menge $D(q)$ sei gegeben durch

$$D(q) := \{d_1(q), d_2(q), \ldots, d_m(q)\} \subseteq \mathbb{R}_+.$$

Auf Ω sei eine Abbildung $\Pi_q : \Omega \to \mathbb{R}$ gegeben durch:

$$\omega = (\omega_0, \omega_1, \ldots) \mapsto \Pi_q(\omega) := \sum_{j=0}^{\infty} d_{\omega_j}(q) q^j,$$

wobei $d_{\omega_j}(q) \in D(q)$ ist.

4.2.17 Definition. *Wir sagen: Die Transversalitätsbedingung hält genau dann auf dem Intervall $J \subseteq]0, 1[$, wenn $q \mapsto \Pi_q(\omega) - \Pi_q(\tau)$ keine doppelte Nullstelle im Intervall J für $\omega \neq \tau$ hat. Dabei bedeutet eine doppelte Nullstelle für eine Funktion f einen Wert q_0, so dass $f(q_0) = f'(q_0) = 0$ ist.*

Sind weiters $u_0, u_1, \ldots, u_{k-1} \in \{1, 2, \ldots, m\}$ so sei

$$\{\omega \in \Omega \,:\, \omega_i = u_i, i = 0, \ldots, k-1\}$$

der Zylinder der Ordnung k und W_k sei die Familie aller Zylinder der Ordnung k. Für $\omega, \tau \in \Omega, \omega \neq \tau$ sei

$$|\omega \wedge \tau| := \min\{i \,:\, \omega_i \neq \tau_i\}.$$

Für $t > 1$ sei:

$$D_t(\mu) := \frac{1}{t-1} \liminf_{k\to\infty} \frac{-\log(\sum_{W\in W_k}(\mu(W))^t)}{k\log(m)}.$$

4.2.18 Satz. *Sei μ ein endliches Maß auf Ω und $(\nu_q)_{q\in]0,1[}$ eine Familie von Maßen auf $\mathbb{R}$ definiert durch $\nu_q := \mu \circ \Pi_q^{-1}$. Sei $J \subseteq]0,1[$ ein offenes Intervall auf dem Π_q die Transversalitätsbedingung erfüllt. Dann gilt:*

1. *Sei $t \in]1,2]$. Dann ist für fast alle q mit $q > m^{-D_t(\mu)}$ das Maß ν_q absolut stetig mit einer Dichte in L^t.*
2. *Für jedes $t > 1$ und für jedes $q \in]0,1[$ gilt: Ist ν_q absolut stetig und ist die Dichte $\frac{d\nu_q}{dx} \in L^t$, dann ist $q \geq m^{-D_t(\mu)}$.*
3. *Angenommen μ ist translations-invariant und ergodisch. Sei $h(\mu)$ die Entropie von μ bezüglich der Verschiebung. Dann ist das Maß ν_q absolut stetig für fast alle $q \in J$ mit $q > e^{-h(\mu)}$ und singulär für alle $q \in J$ mit $q < e^{-h(\mu)}$.*

Beweis. 1. Sei $I := [q_0, q_1] \subseteq J$, so dass $q_0 > m^{-D_t(\mu)}$ ist. Setzen wir $\alpha := t-1$, so ist nach Voraussetzung $\alpha \in]0,1]$. Wir werden zeigen, dass

$$S := \int\limits_I \int\limits_{\mathbb{R}} (\underline{D}(\nu_q, x))^\alpha \, d\nu_q(x)\, d\lambda(q) < \infty$$

ist, wobei

$$\underline{D}(\nu_q, x) := \liminf_{r\searrow 0} \frac{1}{2r}\nu_q(B_r(x))$$

ist. Dann gilt nämlich (siehe 5.3.3), dass das Maß ν_q für fast alle $q \in I$ absolut stetig ist. Außerdem erhalten wir $\underline{D}(\nu_q, x) = \frac{d\nu_q}{d\lambda}(x)$ und $d\nu_q(x) = \frac{d\nu_q}{d\lambda}(x)d\lambda(x)$ und somit ist $\frac{d\nu_q}{d\lambda} \in L^t$ für fast alle $q \in I$.

Wir verwenden zuerst das Lemma von Fatou (siehe 5.3.4) und erhalten dann mit einem Variablenwechsel:

$$\begin{aligned} S &\leq \liminf_{r\searrow 0} \frac{1}{(2r)^\alpha} \int\limits_I \int\limits_{\mathbb{R}} (\nu_q(B_r(x)))^\alpha \, d\nu_q(x)\, d\lambda(q) = \\ &= \liminf_{r\searrow 0} \frac{1}{(2r)^\alpha} \int\limits_I \int\limits_{\Omega} (\nu_q(B_r(\Pi_q(\omega))))^\alpha \, d\mu(\omega)\, d\lambda(q). \end{aligned}$$

Nun vertauschen wir die Integrationsreihenfolge und verwenden die Hölder'sche Ungleichung $\int_I f^\alpha \leq C(\int_I f)^\alpha$ für $\alpha \in]0,1]$ und $f \geq 0$ (siehe 5.3.5), um die Abschätzung

$$S \leq C \liminf_{r\searrow 0} \frac{1}{(2r)^\alpha} \int\limits_{\Omega} \left(\int\limits_I \nu_q(B_r(\Pi_q(\omega)))\; d\lambda(q) \right)^\alpha d\mu(\omega)$$

zu erhalten. Weiters gilt:

$$\begin{aligned}\int_I \nu_q(B_r(\Pi_q(\omega)))\, d\lambda(q) &= \int_I \int_{\mathbb{R}} 1_{B_r(\Pi_q(\omega))}\, d\nu_q\, d\lambda(q) = \\ &= \int_I \int_\Omega 1_{\{\tau\,:\,|\Pi_q(\omega)-\Pi_q(\tau)|\le r\}}\, d\nu_q\, d\lambda(q) = \\ &= \int_\Omega \lambda(\Phi_r(\omega,\tau))\, d\mu(\tau).\end{aligned}$$

Dabei ist

$$\Phi_r(\omega,\tau) := \{q \in I \,:\, |\Pi_q(\omega) - \Pi_q(\tau)| \le r\}.$$

Damit gilt:

$$S \le C \liminf_{r\searrow 0} \frac{1}{(2r)^\alpha} \int_\Omega \left(\int_\Omega \lambda(\Phi_r(\omega,\tau))\, d\mu(\tau) \right)^\alpha d\mu(\omega).$$

4.2.19 Hilfssatz. *Es gibt ein $C > 0$, so dass für alle $\omega, \tau \in \Omega$ gilt:*

$$\lambda(\Phi_r(\omega,\tau)) \le C r q_0^{-|\omega\wedge\tau|}.$$

Beweis. Sei $k := |\omega \wedge \tau|$. Wir setzen

$$\phi_{\omega,\tau}(q) := \Pi_q(\omega) - \Pi_q(\tau) = q^k \sum_{j=0}^{\infty} b_j(q) q^j,$$

mit $b_j(q) \in D(q) - D(q) := \{d_i(q) - d_j(q) \,:\, i,j = 1,\dots,m\}$ und $b_0(q) \neq 0$. Sei

$$\psi(q) := \sum_{j=0}^{\infty} b_j(q) q^j.$$

Können wir für ein $\rho > 0$ zeigen, dass

$$\lambda\{q \in I \,:\, |\psi(q)| \le \rho\} \le C\rho$$

ist, so folgt die Behauptung des Hilfssatzes für $\rho = q_0^{-k} r$.

Zuerst eine Hilfsüberlegung: Da auf $I \subseteq J$ die Transversalitätsbedingung erfüllt ist, nach Voraussetzung, gibt es für jedes ψ (mit einer speziellen Wahl der $b_j(q)$) kein $q_2 \in J$ mit $\psi(q_2) = \psi'(q_2) = 0$. Aus dieser Bedingung folgt, dass es ein $\varepsilon > 0$ gibt (nur abhängig von I), so dass gilt:

$$(|\psi(q)| < \varepsilon \Rightarrow |\psi'(q)| > \varepsilon) \Leftrightarrow (|\psi'(q)| < \varepsilon \Rightarrow |\psi(q)| > \varepsilon).$$

Um dies zu zeigen, unterscheiden wir zwei Fälle:

1. Fall: Angenommen es gibt ein q_2 mit $|\psi(q_2)| = 0$. Aus der Transversalitätsbedingung folgt dann, dass $|\psi'(q_2)| \neq 0$ ist. Da ψ und ψ' stetig sind, gibt es ein $\delta > 0$, so dass für alle $q \in]q_2 - \delta, q_2 + \delta[$ gilt: $|\psi(q)| < \varepsilon < |\psi'(q)|$, womit die Behauptung für den 1. Fall gezeigt ist.

2. Fall: Angenommen es gibt ein q_2 mit $|\psi'(q_2)| = 0$. Dann folgt die Behauptung indem man wie im ersten Fall zeigt: $|\psi'(q)| < \varepsilon \Rightarrow |\psi(q)| > \varepsilon$.

Da weiters die Klasse aller Funktionen ψ (also aller möglichen Wahlen von $b_j(q)$) kompakt in $\mathcal{C}^1(I)$ ist, kann ein ε für alle ψ gewählt werden (Arzela-Ascoli 5.5.5).

Mit dieser Überlegung beweisen wir nun den Hilfssatz: Ist $\rho \geq \varepsilon$, dann setzen wir $C := \frac{1}{\varepsilon}$ und es gilt

$$\lambda(\{q \in I \,:\, |\psi(q)| \leq \rho\}) \leq C\rho = \frac{\rho}{\varepsilon},$$

da $\frac{\rho}{\varepsilon} > 1$ und $I \subseteq]0,1[$ ist.

Sei andererseits $\rho < \varepsilon$. Es ist

$$\{q \in I \,:\, |\psi(q)| \leq \rho\} \subseteq \Psi_\varepsilon := \{q \in I \,:\, |\psi(q)| \leq \varepsilon\}.$$

Wie gezeigt folgt aus $|\psi(q)| < \varepsilon$, dass $|\psi'(q)| > \varepsilon$ ist. Damit ist Ψ_ε eine Vereinigung von Intervallen, in denen ψ monoton ist. In jedem dieser Intervalle hat jener Teil mit $|\psi(q)| < \rho$ höchstens Maß $\frac{2\rho}{\varepsilon}$ (dieser Wert würde erreicht, falls ψ eine Gerade mit einer Steigung vom Betrag ε ist). Außerdem hat $|\psi'(q)|$ eine obere Schranke in I. Damit hat jedes der obigen Intervalle (außer vielleicht das erste und das letze) eine Länge $\geq \frac{\varepsilon}{C'}$. Ihre Anzahl ist also sicher kleiner als $\frac{C'}{\varepsilon}$ und somit gilt

$$\lambda(\{q \in I \,:\, |\psi(q)| \leq \rho\}) \leq \frac{C'}{\varepsilon} \cdot \frac{2\rho}{\varepsilon}$$

und der Hilfssatz ist bewiesen. [38] ☺

Nun können wir mit dem Beweis von Teil 1. fortfahren. Der Hilfssatz 4.2.19 liefert uns die Abschätzung:

$$S \leq C \liminf_{r \searrow 0} \frac{1}{(2r)^\alpha} \int\limits_\Omega \left(\int\limits_\Omega r q_0^{-|\omega \wedge \tau|} \, d\mu(\tau) \right)^\alpha d\mu(\omega).$$

Sei $W_{\omega,k}$ der Zylinder $\{\tau \in \Omega \,:\, \tau_j = \omega_j, j < k\}$ der Ordnung k. Klarerweise ist

$$\{\tau \in \Omega \,:\, |\omega \wedge \tau| = k\} \subseteq W_{\omega,k}$$

für $k \geq 1$. Damit erhalten wir:

$$S \leq C \int\limits_\Omega \left(1 + \sum_{k=1}^\infty q_0^{-k} \mu(W_{\omega,k}) \right)^\alpha d\mu(\omega).$$

Nun verwenden wir die Ungleichung $(\sum b_i)^\alpha \leq \sum b_i^\alpha$ für $b_i \geq 0$ und $\alpha \in]0,1]$ um folgende Abschätzung zu erhalten:

$$\begin{aligned} S &\leq C \left(1 + \int\limits_\Omega \sum_{k=1}^\infty q_0^{-k\alpha} \mu(W_{\omega,k})^\alpha \, d\mu(\omega) \right) = \\ &= C_1 + C_2 \sum_{k=1}^\infty \sum_{W \in W_k} q_0^{-k\alpha} \mu(W)^{\alpha+1} = \\ &= C_1 + C_2 \sum_{k=1}^\infty q_0^{-k(t-1)} \sum_{W \in W_k} \mu(W)^t. \end{aligned}$$

Sei $\delta > 0$, so dass

$$q_0 > m^{-(D_t(\mu)-\delta)}$$

ist. Aufgrund der Definition von $D_t(\mu)$ gilt für k genügend groß:

$$\begin{aligned} \frac{1}{t-1} \cdot \frac{-\log \sum_{W \in W_k} \mu(W)^\alpha}{k \log(m)} &> D_t(\mu) - \delta \\ \log \sum_{W \in W_k} \mu(W)^\alpha &< -k(D_t(\mu)-\delta)(t-1)\log(m). \end{aligned}$$

Damit gilt für k genügend groß:

$$\sum_{W \in W_k} \mu(W)^\alpha < m^{-k(D_t(\mu)-\delta)(t-1)}.$$

Somit erhalten wir schließlich:

$$S \leq C_1 + C_2 \sum_{k=0}^{\infty} (q_0^{-1} m^{-(D_t(\mu)-\delta)})^{(t-1)k}.$$

Da wir $q_0 > m^{-(D_t(\mu)-\delta)}$ gewählt haben, konvergiert die Reihe und 1. ist bewiesen.

2. Sei nun $t \in]1, \infty[$ und ν_q absolut stetig mit einer Dichte $\frac{d\nu_q}{dx}$ in L^t. Dann folgt mit dem Hardy-Littlewood Maximal Satz (siehe 5.3.6 bzw. [22] für einen elementaren Beweis):

$$\lim_{r \to 0} \frac{1}{(2r)^t} \int_{\mathbb{R}} (\nu_q(B_r(x)))^t \, dx = \int_{\mathbb{R}} |\frac{d\nu_q}{dx}|^t \, dx < \infty \quad (*).$$

Setzen wir weiters $\nu_q^W := \mu|_W \circ \Pi_q^{-1}$, so gilt für $k > 0$:

$$\nu_q = \sum_{W \in W_k} \nu_q^W.$$

Dabei ist zu beachten, dass der Träger jedes Maßes ν_q Teilmenge von $\Pi_q(W)$ ist. Sei I_W das kleinste Intervall, das $\Pi_q(W)$ enthält. Ist $a := diam(\Pi_q(W))$, so ist klar, dass für $W \in W_k$ gilt:

$$\lambda(I_W) = aq^k.$$

Setzen wir nun $r := aq^k$, so folgt für $x \in I_W$

$$\nu_q^W(B_r(x)) = \nu_q^W(\mathbb{R}) = \mu(W)$$

und daher gilt:

$$\int_{\mathbb{R}} (\nu_q^W(B_r(x)))^t \, dx \geq aq^k \mu(W)^t.$$

Verwenden wir die Ungleichung $(\sum b_i)^t \geq \sum b_i^t$ für $b_i \geq 0$, so erhalten wir:

$$\begin{aligned} \frac{1}{(2r)^t} \int_{\mathbb{R}} (\nu_q(B_r(x)))^t \, dx &\geq (2aq^k)^{-t} \sum_{W \in W_k} \int_{\mathbb{R}} (\nu_q^W(B_r(x)))^t \, dx \geq \\ &\geq (2a)^{-t} q^{-tk} aq^k \sum_{W \in W_k} \mu(W)^t = \\ &\geq C(q^{1-k})^k \sum_{W \in W_k} \mu(W)^t. \end{aligned}$$

Daraus, mit $(*)$ und k groß genug folgt:

$$\sum_{W \in W_k} \mu(W)^t \leq C' q^{(t-1)k}.$$

Nehmen wir den Logarithmus, dividieren durch $-k\log(m)$ und bilden den $\liminf$, erhalten wir:

$$D_t(\mu) \geq \frac{\log(q)}{-\log(m)}.$$

Damit ist aber $q \geq m^{-D_t(\mu)}$, wie behauptet.

3. Für $\omega \in \Omega$ sei $W_k(\omega)$ der Zylinder der Ordnung k, der ω enthält. Der Satz von Shannon-McMillan-Breimann (siehe 5.4.8) stellt sicher, das für fast alle ω gilt:

$$\lim_{k\to\infty} \frac{1}{k} \log(\mu(W_k(\omega))) = -h(\mu) \quad (**).$$

Nach dem Satz von Egorov (siehe 5.3.7) gibt es für jedes $\varepsilon > 0$ eine Teilmenge $\Omega_\varepsilon \subseteq \Omega$, so dass $\mu(\Omega_\varepsilon) > 1 - \varepsilon$ und die Konvergenz in $(**)$ gleichmäßig auf Ω_ε ist. Bezeichnen wir noch mit μ_ε die Einschränkung von μ auf Ω_ε, so ist aufgrund der Definition $D_t(\mu_\varepsilon) \geq \frac{h(\mu)}{\log(m)}$ für alle $t > 1$. Aus Teil 1. folgt damit, dass das Maß $\mu_\varepsilon \Pi_q^{-1}$ absolut stetig ist für fast alle $q \in J$ mit

$$q > m^{-D_t(\mu)} \geq m^{-\frac{h(\mu)}{\log(m)}} = e^{-\frac{h(\mu)}{\log(m)}\log(m)} = e^{-h(\mu)}.$$

Lassen wir $\varepsilon \to 0$ gehen, ist die im Teil 3. auftretende Behauptung über die absolute Stetigkeit bewiesen.

Billingsley (siehe [5]) verwendete den Satz von Shannon-McMillan-Breiman um abzuleiten, dass die Hausdorff-Dimension des Maßes μ gleich $\frac{h(\mu)}{\log(m)}$ ist. Hier ist

$$\dim_H \mu = \inf\{\dim_H X \subseteq \Omega \,:\, \mu(X) = 1\}$$

und der Raum Ω ist mit der Metrik $d(\omega, \tau) := m^{-|\omega\wedge\tau|}$ ausgestattet.

Die Abbildung $\Pi_q : \Omega \to \mathbb{R}$ ist Hölder-stetig, denn für alle $\omega, \tau \in \Omega$ gilt:

$$|\Pi_q(\omega) - \Pi_q(\tau)| \leq C q^{|\omega\wedge\tau|} = C d(\omega, \tau)^\alpha,$$

mit $\alpha = \frac{\log(1/q)}{\log(m)}$. Damit ist

$$\dim_H \nu_q \leq \frac{1}{\alpha} \dim_H \mu = \frac{h(\mu)}{\log(1/q)}.$$

Für $q < e^{-h(\mu)}$ gilt außerdem:

$$\begin{array}{rcl} q & < & e^{-h(\mu)} \\ \log(q) & < & h(\mu) \\ 1 & > & \dfrac{-h(\mu)}{\log(q)} = \dfrac{h(\mu)}{\log(1/q)} \geq \dim_H \nu_q \end{array}$$

und damit ist $\dim_H \nu_q < 1$ für $q < e^{-h(\mu)}$, also ν_q singulär. [38] ☺

Nun betrachten wir die für unsere Zwecke brauchbaren Bernoulli-Maße. Damit sind jene Maße auf Ω gemeint, die angeben, mit welcher Wahrscheinlichkeit ein Zeichen $d_i(q) \in D(q)$ in einer Folge $\omega \in \Omega$ an einer gewissen Stelle auftritt. Wir benötigen also einen Wahrscheinlichkeitsvektor

$$p = (p_1, p_2, \ldots, p_m),$$

für den $0 \leq p_i \leq 1$ für $i = 1, \ldots, m$ und $\sum_{i=1}^m p_i = 1$ gilt. Zu solch einem Wahrscheinlichkeitsvektor betrachten wir das Bernoulli Produkt Maß $\mu := p^{\mathbb{N}} := (p_1, \ldots, p_m)^{\mathbb{N}}$ auf Ω. Weiters definieren wir zu gegebenem D und p:

$$\nu_q(D, p) := \mu \circ \Pi_q^{-1}.$$

Dieses Maß kann als Verteilungfunktion der Zufallsreihe $\sum_{j=0}^{\infty} d_{\omega_j}(q) q^j$ interpretiert werden. Aus 4.2.18 leiten wir nun den folgenden Satz ab:

4.2.20 Satz. *Sei $J \subseteq]0,1[$ ein Intervall auf dem die Familie $(\Pi_q)_{q \in]0,1[}$ die Transversalitätsbedingung erfüllt. Dann gilt:*

1. *Das Maß ν_q ist absolut stetig für fast alle $q > \prod_{i=1}^m p_i^{p_i}$, so dass $q \in J$, und singulär für alle $q < \prod_{i=1}^m p_i^{p_i}$.*
2. *Sei $t \in]1,2]$. Dann ist für fast alle $q > (p_1^t + \ldots + p_m^t)^{\frac{1}{t-1}}$, so dass $q \in J$, das Maß ν_q absolut stetig mit einer Dichte in L^t.*
3. *Für jedes $t > 1$ und alle $q \in]0,1[$ gilt: Ist ν_q absolut stetig und ist seine Dichte $\frac{d\nu_q}{d\lambda}$ in L^t, dann ist $q \geq (p_1^t + \ldots + p_m^t)^{\frac{1}{t-1}}$.*

Beweis. Nach der Definition von ν_q ist μ ein Bernoulli-Maß auf Ω mit den Gewichten $(p_1, \ldots, p_m)$. Damit ist μ ergodisch, translations-invariant und hat die Entropie

$$h(\mu) = -\sum_{i=1}^m p_i \log(p_i).$$

Damit ist

$$e^{-h(\mu)} = \prod_{i=1}^m p_i^{p_i}$$

(siehe etwa [10]).

Weiters gilt:

$$m^{-D_t(\mu)} = \exp(-D_t(\mu)\log(m)) = \exp(-\frac{1}{t-1} \liminf_{k\to\infty} \frac{-\log \sum_{W \in W_k} \mu(W)^t}{k \log(m)} \log(m)) =$$

$$= \liminf_{k\to\infty} \exp(\frac{1}{k(1-t)} \log \sum_{W \in W_k} \mu(W)^t) = \liminf_{k\to\infty} \left(\sum_{W \in W_k} \mu(W)^t \right)^{\frac{1}{k(1-t)}}.$$

Wie bereits erwähnt, gibt $\mu(W)$ die Wahrscheinlichkeit für einen bestimmten Zylinder der Ordnund k an. Zum Beispiel gilt für $W = \{\omega \in \Omega : \omega_1 = d_1, \omega_2 = d_2\}$, dass $\mu(W) = p_1 p_2$ ist. Damit und mit der Multinomialformel folgt:

$$m^{-D_t(\mu)} = \liminf_{k\to\infty} \left(\sum_{r_1+\ldots+r_k=1} \frac{k!}{r_1! \cdots r_k!} p_1^{r_1} \cdots p_k^{r_k} \right)^{\frac{1}{k(1-t)}} =$$

$$\liminf_{k\to\infty} \left((p_1 + \ldots + p_k)^k \right)^{\frac{1}{k(1-t)}} = (p_1 + \ldots p_k)^{\frac{1}{(1-t)}}.$$

Damit folgt der Satz direkt aus 4.2.18. [38] ☺

In den letzten beiden Sätzen war die Transversalitätsbedingung eine wesentliche Voraussetzung. Darum werden wir jetzt nach Intervallen suchen, die diese Bedigung erfüllen.

4.2.21 Hilfssatz. *Sei* $D(q) := \{d_1(q), \ldots, d_m(q)\}$ *mit* $q \in]0,1[$ *und* $d_j(q) \in \mathcal{C}^1[0,1]$. *Weiters gelte*

$$1 \leq b := b(D) := \sup\{|\frac{d_i(q) - d_j(q)}{d_k(q) - d_l(q)}| \,:\, q \in [0,1], i,j,k,l \leq m, k \neq l\} < \infty$$

und wir definieren:

$$y(b) := \inf\{q > 0 \,:\, \exists\, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, g(x) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} g_n x^n, g_n \in [-b,b] \;\; mit \;\; g(q) = g'(q) = 0\}.$$

Dann hält die Transversalitätsbedingung auf $]0, y(b)[$. *Gibt es weiters für* $k = k(b) \geq 1$ *und* $\gamma = \gamma(b) \in \mathbb{R}$ *eine Funktion* f_b *gegeben durch*

$$f_b(x) = 1 - \sum_{n=1}^{k-1} bx^n + \gamma x^k + \sum_{n=k+1}^{\infty} bx^n,$$

so dass für ein $x_b \in]0,1[$

$$f_b(x_b) > 0 \quad und \quad f_b'(x_b) < 0$$

gilt, dann ist $y(b) > x_b$.

Beweis. Transversalität bedeutet, dass $q \mapsto \Pi_q(\omega) - \Pi_q(\tau)$ keine doppelten Nullstellen besitzt. Setzen wir $k := |\omega \wedge \tau|$, so können wir schreiben:

$$\Pi_q(\omega) - \Pi_q(\tau) = q^k(d_{\omega_k}(q) - d_{\tau_k}(q)) \left(1 + \sum_{j=1}^{\infty} \frac{d_{\omega_{j+k}}(q) - d_{\tau_{j+k}}(q)}{d_{\omega_k}(q) - d_{\tau_k}(q)} q^j\right).$$

Damit genügt die Abwesenheit von doppelten Nullstellen für Potenzreihen der Form

$$g(x) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} g_n x^n \quad \text{mit} \quad g_n \in [-b,b]$$

und die Transversalitätsbedingung gilt auf $]0, y(b)[$ aufgrund der Definition von $y(b)$.

Seien nun weiters k, γ, f_b und x_b wie im Hilfssatz. Sei nun $1 > \delta > 0$ mit $f_b'(x_b) < -\delta$. Wir zeigen zunächst, dass für alle $x \in [0, x_b]$ gilt:

$$f_b(x) > \delta \quad \text{und} \quad f_b'(x) < -\delta.$$

Da die Koeffizienten von f_b'' höchstens einen Vorzeichenwechsel haben, hat f_b'' höchstens eine Nullstelle im Intervall $[0,1[$. Es ist $f_b'(0) = -1 < -\delta$ für $k > 1$ und für $k = 1$ ist $f_b'(0) = \gamma < -\delta$ (nach Voraussetzung ist $f_b'(x) < -\delta$). Es ist also $f_b'(0) < -\delta$. Angenommen es gäbe ein $x_0 \in [0, x_b]$ mit $f_b'(x_0) > -\delta$, dann gilt: $f_b'(0) < f_b'(x_0) > f_b'(x_b)$. Damit hat f_b' mindestens einen relativen Hochpunkt in $[0, x_b]$ und damit hat f_b'' mindestens eine Nullstelle in $[0, x_b]$. Nach der obigen Überlegung hat f_b'' höchstens eine Nullstelle, also nur eine in $[0, x_b]$. Es gibt nun aber ein $x_1 \in [x_b - \varepsilon, x_b]$ mit $f_b'(x_1) > -\delta$ und da $\lim_{x \to 1} f_b'(x) = +\infty$ ist, gibt es ein $x_2 \in [x_b, 1[$ mit $f_b'(x_2) > -\delta$. Damit gilt: $f_b'(x_1) > f_b'(x_b) < f_b'(x_2)$. Also hat f_b'' noch eine Nullstelle in $[x_b, 1[$. Dies ist ein Wiederspruch, da f_b'' nur eine Nullstelle haben kann. Also gilt für alle $x \in [0, x_b]$, dass $f_b'(x) < -\delta$ ist. Damit ist aber für alle $x \in [0, x_b]$ klarerweise $f_b'(x) > f_b'(x_b) > \delta$.

Sei nun g eine Potenzreihe der Form $g(x) = 1+\sum_{n=1}^{\infty} g_n x^n$ mit $g_n \in [-b, b]$. Wir definieren eine Potenzreihe h durch $h(x) := g(x) - f_b(x)$. Aus den Definitionen von g und f_b folgt dann

$$h(x) = \sum_{i=1}^{l} c_i x^i - \sum_{i=l+1}^{\infty} c_i x^i,$$

mit $c_i \geq 0$ für alle i und $l = k-1$ oder $l = k$. Damit ergibt sich für $x \in]0, x_b[$ (da dann $f_b(x) > \delta$ bzw. $f_b'(x) < -\delta$ ist):

$$g(x) < \delta \Rightarrow h(x) < 0 \Rightarrow h'(x) < 0 \Rightarrow g'(x) < -\delta.$$

Dabei ergibt sich die mittlere Folgerung aus:

$$h(x) < 0 \Rightarrow \sum_{j=1}^{l} c_j x^j < \sum_{j=l+1}^{\infty} c_j x^j \Rightarrow \sum_{j=1}^{l} c_j x^{j-1} < \sum_{j=l+1}^{\infty} c_j x^{j-1} \Rightarrow h'(x) < 0.$$

Also hat g keine doppelte Nullstelle in $[0, x_b]$ und der Hilfssatz folgt aus der Definition von $y(b)$. [38] ☺

4.2.22 Hilfssatz. *Die Transversalitätsbedingung hält auf dem Intervall $]0, y(b)[$ (mit b wie in 4.2.21) und*

$$\begin{aligned} y(1) &> 0.64, \\ y(2) &= 0.5, \\ y(3) &> 0.415. \end{aligned}$$

Beweis. Sei $f_1(x) := 1-x-x^2-x^3+0.1x^4+\sum_{n=5}^{\infty} x^n$. Dann ist $f_1(0.64) > 0$ und $f_1'(0.64) < 0$, und damit ist $y(1) > 0.64$ nach 4.2.21.

Die Funktion f_2 gegeben durch $f_2(x) = 1-2x-2x^2+2x^3+\sum_{n=4}^{\infty} 2x^n$ erfllt für $x \in]0, \frac{1}{2}[$ die Bedingung $f_2(x) > 0, f_2'(x) < 0$. Weiters hat sie bei $\frac{1}{2}$ eine doppelte Nullstelle. Damit ist $y(2) = 0.5$ nach 4.2.21.

Die Funktion $f_3(x) = 1-3x-0.7x^2+\sum_{n=3}^{\infty} 3x^n$ erfüllt $f_3(0.415) > 0$ und $f_3'(0.415) < 0$. Damit ist $y(3) > 0.415$ nach 4.2.21.

(Die Funktionen f_1 und f_2 wurden mit Hilfe des Computerprogramms Mathematica gefunden.)[38] ☺

4.2.23 Folgerung. *Sei $m = 2$ und $p \in [\frac{1}{3}, \frac{2}{3}]$. Dann ist ν_q^p für fast alle $q \in [p^p(1-p)^{1-p}, 1[$ absolut stetig und hat für $t \in]1, 2]$ eine Dichte in L^t für fast alle $q \in [(p^t + (1-p)^t)^{\frac{1}{t-1}}, 1[$.*

Beweis. Wir leiten die Folgerung aus 4.2.20 ab. Dazu müssen wir zeigen, dass die Transversalitätsbedingung hält. Da $m = 2$ ist, gilt $b(D) = 1$ und damit hält die Transversalitätsbedingung auf $]0, 0.64[$ nach 4.2.22. Für $p \in [\frac{1}{3}, \frac{2}{3}]$ und $t \leq 2$ gilt:

$$(p^t + (1-p)^t)^{\frac{1}{t-1}} \leq p^2 + (1-p)^2 \leq \frac{1}{3^2} + \frac{2}{3^2} = \frac{5}{9} < 0.64.$$

Damit müssen wir noch zeigen, dass ν_q^p eine Dichte in L^2 für fast alle $q \in]0.64, 1[$ hat.

Schreiben wir
$$\sum_{n=0}^{\infty} \pm q^n = \sum_{n=0}^{\infty} \pm (q^2)^n + q \sum_{n=0}^{\infty} \pm (q^2)^n,$$
dann sehen wir, dass
$$\widehat{\nu}_q^p = \widehat{\nu}_{q^2}^p \widehat{\nu}_{q^2}^p$$
ist. Weiters ist $\widehat{\nu}_{q^2}^p \in L^2$, wenn $\nu_{q^2}^p$ eine Dichte in L^2 hat (Satz von Plancherel). Damit ist dann $\widehat{\nu}_q^p \in L^1$ und ν_q^p hat eine stetige Dichte. Zeigen wir also, dass ν_q^p eine Dichte in L^2 für fast alle $q \in [p^2 + (1-p)^2, \sqrt{p^2 + (1-p)^2}]$ hat, so erhalten wir das Ergebnis durch wiederholtes anwenden desselben Arguments. Da $p \in [\frac{1}{3}, \frac{2}{3}]$ ist, genügt es, $]0.64, \sqrt{\frac{5}{9}}[$ zu überdecken.

Betrachten wir die Faltung $\nu_q^p * \nu_q^p$. Zu diesem Maß gehören die Zeichenmenge
$$D = \{-2, 0, 2\}$$
und die Wahrscheinlichkeiten
$$(p^2, 2p(1-p), (1-p)^2).$$
Es gilt:
$$\frac{d(\nu_q^p * \nu_q^p)}{dx} \in L^2 \Rightarrow \widehat{\nu_q^p * \nu_q^p} \in L^2 \Rightarrow \widehat{\nu}_q^p \in L^4 \Rightarrow \widehat{\nu}_{\sqrt{q}}^p \in L^2 \Rightarrow \frac{d\nu_{\sqrt{q}}^p}{dx} \in L^2.$$
Für $\nu_q^p * \nu_q^p$ ist $b(D) = 2$ und damit hält die Transversalitätsbedingung auf $]0, \frac{1}{2}[$ nach 4.2.22. Nach 4.2.18 hat die Faltung $\nu_q^p * \nu_q^p$ eine Dichte in L^2 für fast alle
$$q \in]p^4 + 4p^2(1-p)^2 + (1-p)^4, \frac{1}{2}[.$$
Man überprüft leicht, dass $p \mapsto p^4 + 4p^2(1-p)^2 + (1-p)^4$ maximal ist für $p = \frac{1}{3}$. Damit hat ν_q^p eine Dichte in L^2 für fast alle $q \in]\sqrt{\frac{11}{27}}, \frac{1}{2}[$. Da $\sqrt{\frac{11}{27}} < 0.64$ ist, haben wir $]0, \frac{1}{\sqrt{2}}[$ überdeckt.

Schließlich betrachten wir $\nu_q^p * \nu_q^p * \nu_q^p$. Zu diesem Maß gehören die Zeichenmenge
$$D = \{-3, -1, 1, 3\}$$
und die Wahrscheinlichkeiten
$$(p^3, 3p^2(1-p), 3p(1-p)^2, (1-p)^3).$$
Wie oben können wir argumentieren, dass $\nu_{\sqrt[3]{q}}^p$ eine Dichte in L^2 hat, wenn $\nu_q^p * \nu_q^p * \nu_q^p$ eine Dichte in L^2 hat. Nach 4.2.22 hält die Transversalitätsbedingung auf $]0, y(3)[\supseteq]0, 0.415[$ und nach einer ähnlichen Rechnung wie oben erhalten wir, dass ν_q^p eine Dichte in L^2 für fast alle $q \in]\sqrt[3]{\frac{245}{729}}, \sqrt[3]{0.415}[$. Da $\sqrt[3]{\frac{245}{729}} < \frac{1}{\sqrt{2}}$ und $\sqrt[3]{0.415} > \sqrt{\frac{5}{9}}$ ist, sind wir fertig. [38] ☺

4.2.24 Korollar. *Für fast alle $q \in [\frac{1}{2}, 1[$ gibt es eine stetige Schilling-Funktion.*

Beweis. Nach 4.2.23 ist $\nu_q^{\frac{1}{2}}$ für fast alle $q \in [\frac{1}{2}, 1[$ absolut stetig und hat für fast alle $q \in [\frac{1}{2}, 1[$ eine Dichte in L^2. Hat aber $\nu_q^{\frac{1}{2}}$ eine Dichte in L^2, so ist nach dem Satz von Plancherel auch $\widehat{\nu}_q^{\frac{1}{2}} \in L^2$. Nach 3.1.3 gibt es damit eine stetige Schilling-Funktion für fast alle $q \in [\frac{1}{2}, 1[$. [14] ☺

4.2.25 Folgerung. *Sei* $\eta_q := \nu_q(D,p)$ *mit* $D := \{-1,0,1\}$ *und* $p := (\frac{1}{4}, \frac{1}{2}, \frac{1}{4})$. *Das Maß* η_q *ist für fast alle* $q \in]\frac{1}{2\sqrt{2}}, 1[$ *absolut stetig und singulär für alle* $q < \frac{1}{2\sqrt{2}}$.

Beweis. Da $\eta_q = \nu_q^{\frac{1}{2}} * \nu_q^{\frac{1}{2}}$ ist, ist η_q für fast alle $q \in [\frac{1}{2}, 1[$ absolut stetig nach 4.2.23. Da $b(D) = 2$ und damit nach 4.2.22 $y(b) = \frac{1}{2}$ ist, hält die Transversalitätsbedingung auf $[0, \frac{1}{2}]$ und die Behauptung folgt aus 4.2.20. [38] ☺

4.2.26 Korollar. *Für* $q \in [0, \frac{1}{2\sqrt{2}}[$ *gibt es keine Schilling-Funktion. Es gibt jedoch für fast alle* $q \in]\frac{1}{2\sqrt{2}}, 1[$ *eine Schilling-Funktion. Ist* $q \in [\frac{1}{2}, 1[$, *so ist die zugehörige Schilling-Funktion stetig, ist hingegen* $q \in]\frac{1}{2\sqrt{2}}, \frac{1}{2}[$, *so ist die zugehörige Schilling-Funktion nicht stetig.*

Beweis. Mit 4.2.25 und 3.2.2 folgt die Existenz bzw. Nicht-Existenz einer Schilling-Funktion für die angegebenen Intervalle. Aus 4.2.4 und 4.2.24 folgt die Stetigkeit für $q > \frac{1}{2}$. Nach 4.2.3 gibt es für $q < \frac{1}{2}$ keine stetige Schilling-Funktion und damit ist das Korollar bewiesen. ☺

Im Licht des letzten Ergebnisses ist es eigentlich nicht mehr interessant, für welche Werte q eine Schilling-Funktion existiert. Für zufällig gewähltes $q \in]\frac{1}{2\sqrt{2}}, 1[$ gibt es mit fast absoluter Sicherheit die Schilling-Funktion. Trotzdem sollen hier noch einige Werte für q vorgestellt werden, für die das Maß ν_q absolut stetig ist und es somit die Schilling-Funktion gibt, die noch dazu stetig ist. Die folgenden Ergebnisse beschrieb Garsia in seiner Arbeit von 1962 (siehe [19]).

4.2.27 Definition. *Ein Polynom* P *mit ganzzahligen Koeffizienten und Leitkoeffizient 1 ist genau dann vom Typ A, wenn* $\alpha, \alpha_1, \ldots, \alpha_s$ *seine Nullstellen sind und wenn gilt:*

$$1 < \alpha < 2 \quad \textit{und} \quad \alpha \prod_{|\alpha_i|>1} |\alpha_i| = 2.$$

Ein Polynom P *ist genau dann vom Typ B, wenn es vom Typ A und irreduzibel ist.*

4.2.28 Hilfssatz. *Sei* P *ein Polynom vom Typ A und seine* $\alpha, \alpha_1, \ldots, \alpha_s$ *seine Nullstellen, wobei* $1 < \alpha < 2$ *ist. Dann ist* α *auch die Nullstelle eines Polynoms vom Typ* B. *Weiters gilt für* $1 \leq i \leq s$, *dass* $|\alpha_i| > 1$ *ist und damit ist* α *keine Nullstelle eines Polynoms mit Koeffizienten* ± 1 *oder 0. Speziell muss der konstante Koeffizient von* P *entweder* $+2$ *oder* -2 *sein. (Aufgrund dieser Eigenschaften könnte man diese Zahlen als Gegenteil der P.V.-Zahlen bezeichnen.)*

Beweis. Siehe [19]. ☺

4.2.29 Satz. *Sei* P *ein Polynom vom Typ A und seine* $\alpha, \alpha_1, \ldots, \alpha_s$ *seine Nullstellen, wobei* $1 < \alpha < 2$ *ist. Dann ist* $\nu_{\frac{1}{\alpha}}$ *absolut stetig und hat eine Ableitung, die durch*

$$\frac{2}{\prod_{i=1}^{s}(|\alpha_i| - 1)}$$

beschränkt ist.

Beweis. Siehe [19]. ☺

4.2.30 Beispiel. *Beispiele im Sinne von 4.2.28 sind Nullstellen von Polynomen mit ganzzahligen Koeffizienten, dem Leitkoeffizientem 1, dem konstanten Koeffizientem ± 2 und deren Nullstellen außerhalb des Einheitskreises liegen. Das sind zum Beispiel die Polynome gegeben durch*

$$P(x) = x^{p+n} - x^n - 2,$$

wobei $n, p \in \mathbb{N}$ sind mit $n, p > 0$ und $\max(n, p) \geq 2$.

Auch folgende Polynome sind Beispiele für Polynome vom Typ B:

$$\begin{array}{ccc} x^3 + x^2 - x - 2, & x^3 - x - 2, & x^3 - 2x - 2, \\ x^3 - x^2 + x - 2, & x^3 - x^2 - 2, & x^3 - 2x^2 + 2x - 2, \\ & x^4 - x^2 + x - 2. & \end{array}$$

(Siehe [19].)

4.3 Weitere Lösungskriterien

Zum Abschluss sollen noch einige Kriterien angeführt werden, mit deren Hilfe man die Existenz einer Schilling-Funktion für spezielle Werte von q untersuchen kann.

Wir betrachten Folgen reeller, positiver Zahlen $(r_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $\sum_{n=1}^{\infty} r_n^2 < \infty$ und deren Verteilungsfunktion $\nu(-, r)$ (siehe auch 3.2). Die Kriterien geben an, für welche Folge r die Verteilungfunktion $\nu(-, r)$ absolut stetig oder singulär ist. Wie wir in 4.2 gesehen haben, erhalten wir dadurch auch Aufschlüsse über die Existenz der Schilling-Funktion zu einem Wert q, falls die Folge $(r_n)_{n\in\mathbb{N}} = (q^n)_{n\in\mathbb{N}}$ ist.

4.3.1 Satz. *Sei A_n die Menge aller n-Tupel $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ mit $\alpha_i \in \{-1, 0, 1\}$ für $i = 1, \ldots, n$ und $|a_1| + \ldots + |a_n| \neq 0$. Sei weiters*

$$m_n(r) := \min_{\alpha\in A_n} |a_1 r_1 + a_2 r_2 + \ldots + a_n r_n|.$$

Schließlich bezeichne $E^p r$ für jedes $p \in \mathbb{N}$ die Folge $(R_n)_{n\in\mathbb{N}}$ definiert durch $R_n := r_{p+n}$ für alle n. Dann gilt:

Gibt es ein $p \in \mathbb{N}$, so dass

$$\liminf_{n\to\infty} 2^n m_n(E^p r) > 0$$

ist, dann ist $\nu(-, r)$ absolut stetig mit einer beschränkten Ableitung.

Beweis. Siehe [19]. ☺

4.3.2 Satz. *Definiere für $\omega^p \in \{-1, 1\}^p$:*

$$\Pi(r, \omega^p) := \sum_{n=1}^{\infty} \omega_n^p r_n.$$

Weiters bezeichne M_p für $\omega^p, \tau^p \in \{-1, 1\}^p$ die Anzahl der Lösungen der Ungleichung

$$|\Pi(r, \omega^p) - \Pi(r, \tau^p)| < \left(\sum_{n=p+1}^{\infty} r_n^2\right)^{\frac{1}{2}} := \rho_n$$

Dann ist

$$\liminf_{p\to\infty} \frac{M_p}{4^p \rho_p} > 0$$

und folgende Bedingungen sind äquivalent:

$$(a) \qquad \widehat{\nu}(x,r) = \prod_{k=1}^{\infty} \cos(xr_k) \in L^2.$$

$$(b) \qquad \liminf_{p\to\infty} \frac{M_p}{4^p \rho_p} < \infty.$$

$$(c) \qquad \limsup_{p\to\infty} \frac{M_p}{4^p \rho_p} < \infty.$$

Beweis. Siehe [27]. ☺

Wie Garsia zeigte, folgen diese zwei Kriterien aus dem nächsten Satz:

4.3.3 Satz. *Sei $\rho_n := (\sum_{k=n+1}^{\infty} r_n^2)^{\frac{1}{2}}$ und $M_{k,n}$ bezeichne für alle $k,n \in \mathbb{N}$ die Anzahl der Vorzeichen-Verteilungen, für die*

$$\pm r_1 \pm r_2 \pm \ldots \pm r_n \in]k\rho_n, k\rho_n + \rho_n[$$

ist. Dann gilt:

Die Funktion $\nu(-,r)$ ist genau dann absolut stetig mit einer Ableitung in L^p für ein $p > 1$, wenn

$$\limsup_{p\to\infty} \frac{1}{2^n \rho_n^{\frac{p-1}{p}}} \left(\sum_{k=-\infty}^{+\infty} M_{k,n}^p \right)^{\frac{1}{2}} < \infty$$

ist. (Der $\limsup$ *kann auch durch den* $\liminf$ *ersetzt werden!)*

Beweis. Siehe [19]. ☺

Da jedoch wie gezeigt $\nu(-,r)$ für fast alle r (sogar für fast alle r der Form $r_n = q^n$ mit $q \in]0,1[$) absolut stetig ist, sind Kriterien für die Singularität von $\nu(-,r)$ interessanter. (Die Verneinung von 4.3.3 kann etwa dazu verwendet werden.) Garsia fand auch solch ein Kriterium. Wir benötigen jedoch einige Vorbereitungen dafür:

Wir betrachten, wie gehabt, eine Folge $r = (r_1, r_2, \ldots)$ positiver, reeller Zahlen mit $\sum_{n=1}^{\infty} r_n < \infty$ und ein $p \in \mathbb{N}, p > 1$. Sei $\omega \in \{-1,1\}^{\mathbb{N}}$, dann zerlegen wir die Zufallsreihe $S(\omega,r) := \sum_{n=1}^{\infty} \omega_n r_n$ in die Summe

$$S(\omega,r) = \sum_{N=1}^{\infty} Z_N,$$

wobei

$$Z_N := \sum_{n=1}^{p} \omega_{(N-1)p+n} r_{(N+1)p+n}$$

ist. Weiters habe die Folge r die Eigenschaft, dass jede Zufallsvariable Z_N nur $\sigma < 2^p$ Werte

$$Z_N^1, Z_N^2, \ldots, Z_N^\sigma \quad (\sigma \text{ unabhängig von } N)$$

mit den Wahrscheinlichkeiten

$$p^1, p^2, \ldots, p^\sigma \quad \text{(unabhängig von } N\text{)}$$

annimmt. Für jedes $\tau \in \mathbb{N}$ sei D_τ der Wahrscheinlichkeitsraum $\{1, 2, \ldots, \tau\}$ mit Gleichverteilung. Außerdem identifizieren wir $\{-1, 1\}^n$ mit D_2^n.

Unter diesen Annahmen erhalten wir durch die Summe

$$Z_1 + Z_2 + \ldots + Z_N$$

eine Funktion $\varphi : D_2^{N_p} \to D_\sigma^N$ wie folgt: Ist $w = (w_1, \ldots, w_{N_p}) \in D_2^{N_p}$, so sei

$$\varphi(w) = (i_1, i_2, \ldots, i_N) \in D_\sigma^N$$

genau dann, wenn

$$Z_k^{i_k} = \sum_{n=1}^{p} w_{(k-1)p+n} r_{(k-1)p+n} \qquad k = 1, \ldots, N$$

ist.

Sei weiters $A \cup B = D_\sigma, A \cap B = \emptyset$ eine Partition von D_σ und $P_A := \sum_{k \in A} p^k$. Für $N, u \in \mathbb{N}, 1 \leq u \leq N$ sei $E_{N,u} \subseteq D_\sigma^N$ (abhängig von der Partition A, B) wie folgt definiert: Ein Punkt $i = (i_1, \ldots, i_N) \in D_\sigma^N)$ ist genau dann ein Punkt von $E_{N,u}$, wenn genau u der i_k in A liegen. Ist R eine endliche Menge, so sei $|R|$ die Anzahl der Elemente von R. Somit gilt:

$$|E_{N,u}| = \binom{N}{u} |A|^u (\sigma - |A|)^{N-u}.$$

Wir definieren $E_{N,u}^{-1} \subseteq D_2^{N_p}$ durch:

$$E_{N,u}^{-1} := \{w \, : \, \varphi(w) \in E_{N,u}\}.$$

Die Wahrscheinlichkeit für $\varphi(w) \in E_{N,u}$ ist gegeben durch:

$$P(E_{N,u}^{-1}) = \binom{N}{u} P_A^u (1 - P_A)^{N-u}.$$

Für einen gegebenen Wert $1 < \gamma(N) < N$ setzen wir

$$E_N := \bigcup_{u \geq \gamma(N)} E_{N,u} \quad \text{und} \quad E_N^{-1} := \bigcup_{u \geq \gamma(N)} E_{N,u}^{-1}.$$

Dann gilt:

$$\begin{aligned} |E_N| &= \sum_{u \geq \gamma(N)} \binom{N}{u} |A|^u (\sigma - |A|)^{N-u}, \\ P(E_N^{-1}) &= \sum_{u \geq \gamma(N)} \binom{N}{u} P_A^u (1 - P_A)^{N-u}. \end{aligned}$$

4.3.4 Satz. *Kann die Partition A und die Folge $(\gamma(N))_{N \in \mathbb{N}}$ so gewählt werden, dass*

$$\lim_{N \to \infty} \Big(\sum_{k=N_{p+1}}^{\infty} r_k \Big) \cdot \sum_{u \geq \gamma(N)} \binom{N}{u} |A|^u (\sigma - |A|)^{N-u} = 0$$

ist und

$$\limsup_{N\to\infty} \sum_{u\geq\gamma(N)} \binom{N}{u} P_A^u (1-P_A)^{N-u} > 0$$

ist, dann ist $\nu(-,r)$ singulär.

Beweis. Siehe [19]. ☺

5 Hilfsmittel

5.1 Unendliche Produkte

5.1.1 Definition. *Eine Reihe $\sum g_k$ von Funktionen $g_k : X \to \mathbb{C}$ heißt normal konvergent in X, wenn jeder Punkt $x \in X$ eine Umgebung U besitzt, so dass gilt*

$$\sum |g_k|_U = \sum \sup_{z\in U} |g_k(z)| < \infty.$$

Ein Produkt $\prod f_k$ mit $f_k = 1 + g_k$ (stetig von X auf $\mathbb{C}$) heißt normal konvergent in X, wenn die Reihe $\sum g_k$ in X normal konvergiert.

5.1.2 Satz. *Ist $\prod f_k$ normal konvergent, so gibt es f, so dass das Produkt kompakt gegen f konvergiert.*

Beweis. Siehe zum Beispiel [42]. ☺

5.1.3 Satz. *(Weierstraß'scher Konvergenzsatz) Es sei f_k eine Folge von in D holomorphen Funktionen, die in D kompakt gegen f konvergiert. Dann ist f holomorph in D und für jedes $k \in \mathbb{N}$ konvergiert die Folge $f_n^{(k)}$ der k-ten Ableitung in D kompakt gegen $f^{(k)}$.*

Beweis. Siehe zum Beispiel [42]. ☺

5.2 Fourieranalysis

5.2.1 Definition. *$f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ heißt von exponentiellem Typ $\sigma > 0$, wenn für alle $\varepsilon > 0$ ein $A_\varepsilon \in \mathbb{R}$ existiert, sodass $|f(z)| \leq A_\varepsilon e^{(\sigma+\varepsilon)|z|}$ ist für alle $z \in \mathbb{C}$.*

5.2.2 Satz. *(Satz von Paley - Wiener) Sei $f \in L^2$. Dann ist f genau dann die Fourier Transformierte einer außerhalb von $[-\sigma,\sigma]$ verschwindenden Funktion, wenn f die Einschränkung einer ganzen Funktion vom exponentiellen Typ σ auf die reelle Achse ist.*

Beweis. Siehe [46] ☺

5.2.3 Satz. *Sei $f \in L^1$ und $\hat{f} \geq 0$. Ist f stetig in 0, dann ist $\hat{f} \in L^1$ und*

$$f(x) = \frac{1}{2\pi} \int\limits_{\mathbb{R}} e^{ixt} \hat{f}(t) d\lambda(t)$$

für fast alle x.

Beweis. Siehe [46]. ☺

5.2.4 Definition. *Sei $f \in L^1$ und $T(f) \subseteq [0, 2\pi]$, dann heißt für $n \in \mathbb{N}$*

$$a_n := \frac{1}{2\pi} \int\limits_{[0,2\pi]} f(x) e^{-inx} d\lambda(x)$$

exponentieller Fourierkoeffizient von f und

$$S(f, x) := \sum_{-\infty}^{\infty} a_n e^{inx}$$

Fourierreihe von f.

5.2.5 Satz. *Ist f wie in 5.2.4 und gerade, so ist $S(f, x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(nx)$.*

Beweis. Siehe [49]. ☺

5.2.6 Satz. *Sei f wie in 5.2.4 und Lipschitz - stetig auf einem Intervall $I :=]a, b[\subseteq [0, 2\pi]$. Dann ist $S(f)$ für jedes $0 < \delta < \frac{1}{2}(b - a)$ gleichmäßig konvergent auf $[a + \delta, b - \delta]$ und $f = S(f)$.*

Beweis. Siehe [49]. ☺

5.3 Maß- und Integrationstheorie

5.3.1 Satz. *(Cauchy'sche Ungleichung) Sei $G \subseteq \mathbb{C}$ ein offenes Gebiet, $f : G \to \mathbb{C}$ holomorph, $z_0 \in G$ und $r \in \mathbb{R}, r > 0$ mit $\overline{B_r(z_0)} \subseteq G$. Setzt man*

$$m(r) := \max\{|f(z_0 + re^{it})| \,:\, t \in \mathbb{R}\},$$

dann gilt:

$$|f^{(n)}(z_0)| \leq n! \cdot \frac{m(r)}{r^n}.$$

Beweis. Siehe [29]. ☺

5.3.2 Hilfssatz. *Sei $\Gamma \subseteq \mathbb{R}$ beschränkt mit $0 < \lambda(\Gamma) < \infty$. Dann gibt es für alle $m \in \mathbb{R}$, $\lambda(\Gamma) > m > 0$ und für alle $d \in \mathbb{N}, d \geq 2$ mindestens d Punkte in Γ, die voneinander mindestens den Abstand $\frac{m}{d-1}$ haben. Also: Es gibt $y_0, y_1, \ldots, y_{d-1} \in \Gamma$ mit*

$$|y_i - y_j| \geq \frac{m}{d-1} \quad \text{für } i \neq j.$$

Beweis. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit können wir Γ offen annehmen (sonst betrachten wir den Kern von Γ). Sei weiters

$$0 < \varepsilon < \frac{\lambda(\Gamma) - m}{d - 1}.$$

Definiere

$$x_0 := \inf(\Gamma)$$

dann ist $[x_0, x_0 + \varepsilon] \cap \Gamma \neq \emptyset$. Also gibt es ein $y_0 \in [x_0, x_0 + \varepsilon] \cap \Gamma$. Wähle solch ein y_0.

Für $0 \leq i \leq d - 2$ sei

$$x_{i+1} := \inf([y_i + \frac{m}{d-1}, \infty[\cap \Gamma)$$

und wähle
$$y_{i+1} \in [x_{i+1}, x_{i+1} + \varepsilon] \cap \Gamma.$$
Diese Konstruktion ist möglich, denn: Sei $0 \leq i \leq d-2$ und x_i, y_i schon festgelegt. Dann gilt:
$$\lambda([x_0, y_i + \frac{m}{d-1} \cap \Gamma]) \leq (i+1)(\varepsilon + \frac{m}{d-1}) < (d-1)(\frac{\lambda(\Gamma) - m}{d-1} + \frac{m}{d-1}) = \lambda(\Gamma).$$
Deshalb können ist $[y_i + \frac{m}{d-1}, \infty[\cap \Gamma \neq \emptyset$ und wir können
$$x_{i+1} := \inf([y_i + \frac{m}{d-1}, \infty[\cap\Gamma)$$
setzen. Damit ist aber $[x_{i+1}, x_{i+1} + \varepsilon] \cap \Gamma \neq \emptyset$ und wir können
$$y_{i+1} \in [x_{i+1}, x_{i+1} + \varepsilon] \cap \Gamma$$
wählen.

Nach Konstruktion ist $y_i \in \Gamma$ für $0 \leq i \leq d-1$ und $|y_i - y_j| \geq \frac{m}{d-1}$ für $i \neq j$. ☺

5.3.3 Satz. *Seien μ, λ Radon Maße auf $\mathbb{R}^n$. μ genau dann absolut stetig bezüglich λ, wenn*
$$\underline{D}(\mu, \lambda, x) := \liminf_{r \searrow 0} \frac{\mu(B_r(x))}{\lambda(B_r(x))} < \infty$$
für μ-fast alle $x \in \mathbb{R}^n$ ist.

Beweis. Siehe [30], Satz 2.12. ☺

5.3.4 Hilfssatz. *(Lemma von Fatou) Sei (X, A, μ) ein Maßraum und*
$$f_n : X \to \overline{\mathbb{R}} := \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$$
für $n \in \mathbb{N}$ positiv, A-messbare Funktionen. Dann gilt:
$$\int_X \liminf_{n\to\infty} f_n \, d\mu \leq \liminf_{n\to\infty} \int_X f_n \, d\mu.$$

Beweis. Siehe etwa [23]. ☺

5.3.5 Satz. *(Hölder'sche Ungleichung) Seien $0 < p < 1, f, g \in L^p, f, g \geq 0$, $\int g^{\frac{p}{p-1}} d\mu \neq 0$ (beachte: $\frac{p}{p-1} < 0$). Dann gilt:*
$$\int fg \, d\mu \geq (\int f^p \, d\mu)^{\frac{1}{p}} (\int g^{\frac{p}{p-1}} \, d\mu)^{\frac{p-1}{p}}.$$

Beweis. Siehe etwa [23]. ☺

5.3.6 Satz. *(Maximalsatz von Hardy-Littlewood) Sei $p \in \mathbb{R}, p > 1$. Sei $f : \mathbb{R} \to \overline{\mathbb{R}}$ eine positive, Lebesgue-messbare Funktion, so dass $\int_F f \, d\lambda < \infty$ für alle kompakten Mengen F. Definiere $f^{\Delta(r)}, f^{\Delta(l)}$ und f^{Δ} durch*
$$\begin{aligned} f^{\Delta(r)}(x) &:= \sup\{\tfrac{1}{u-x} \textstyle\int_{[x,u]} f \, d\lambda \, : \, u \in]x, \infty[\} \\ f^{\Delta(l)}(x) &:= \sup\{\tfrac{1}{x-u} \textstyle\int_{[u,x]} f \, d\lambda \, : \, u \in]-\infty, x[\} \\ f^{\Delta}(x) &:= \max\{f^{\Delta(r)}(x), f^{\Delta(l)}(x)\}. \end{aligned}$$

Dann gilt für $j = r, l$:

$$\left(\int_{\mathbb{R}} (f^{\Delta(j)})^p \, d\lambda\right)^{\frac{1}{p}} \leq \frac{p}{p-1}\left(\int_{\mathbb{R}} f^p \, d\lambda\right)^{\frac{1}{p}}$$

und

$$\left(\int_{\mathbb{R}} (f^{\Delta})^p \, d\lambda\right)^{\frac{1}{p}} \leq \frac{2p}{p-1}\left(\int_{\mathbb{R}} f^p \, d\lambda\right)^{\frac{1}{p}}.$$

Beweis. Siehe etwa [23]. ☺

5.3.7 Satz. *(Satz von Egorov) Sei (X, A, μ) ein endlicher Maßraum. Seien $f, (f_n)$ A-messbare Funktionen, die μ-fast überall aus X definiert und endlich sind. Gilt $f_n \to f$ μ-fast überall auf X, dann gibt es für jedes $\varepsilon > 0$ eine Menge $A_\varepsilon \in A$, so dass $\mu(X \setminus A_\varepsilon) < \varepsilon$ ist und $f_n \to f$ gleichmäßig aus A_ε ist.*

Beweis. Siehe etwa [23]. ☺

5.4 Ergoden-Theorie

Im Folgenden sollen jene Elemente der Ergoden-Theorie vorgestellt werden, die in der Diplomarbeit verwendet werden. Für eine ausführlichere Einführung seien [6],[10] und [39] empfohlen.

Worum geht es bei der Ergoden-Theorie? Ergoden-Theorie ist das mathematische Studium des durchschnittlichen Langzeitverhaltens eines Systems. Dabei formen alle möglichen Zustände eines Systems einen Raum X. Die Entwicklung des Systems wird durch eine Transformation $T : X \to X$ repräsentiert. Ist x der Zustand des Systems zum Zeitpunkt 0, so ist $T(x)$ der Zustand des Systems zum Zeitpunkt 1.

Um nun so ein System mathematisch zu untersuchen, müssen wir eine gewisse Struktur auf X und gewisse Bedingungen für T verlangen. Es gibt drei besonders untersuchte Gebiete:

1. Ist X eine differenzierbare Mannigfaltigkeit und T ein Diffeomorphismus, dann sprechen wir von einem differenzierbaren dynamischen System.

2. Ist X ein topologischer Raum und T ein Homeomorphismus, dann sprechen wir von einem topologischen dynamischen System.

3. Ist X ein Maßraum und T eine Maß-erhaltende Transformation, dann sprechen wir von der Ergoden-Theorie.

Dazu nun einige Definitionen:

5.4.1 Definition. *Ein Automorphismus T des Maßraumes (X, A, μ) ist eine Bijektion $T : X \to X$, so dass für alle $B \in A$ auch $TB, T^{-1}B \in A$ sind und $\mu(B) = \mu(TB) = \mu(T^{-1}B)$ ist. Das Maß μ heißt dann invariant bezüglich T.*

5.4.2 Definition. *Eine Menge $B \in A$ heißt invariant, wenn $T(B) = B = T^{-1}(B)$ ist.*

5.4.3 Definition. *Der Maßraum (X, A, μ) bzw. das Maß μ bzw. der Automorphismus T heißt ergodisch, wenn für jede invariante Menge B gilt: $\mu(B) = 0$ oder $\mu(B) = 1$.*

5.4.4 Beispiel. *Sei $I := \{1, 2, \ldots, r\}$. Weisen wir jedem $i \in I$ eine Zahl $p_i \in \mathbb{R}, p_i > 0$ zu, so dass $\sum_{i \in I} p_i = 1$ ist, dann erhalten wir ein Wahrscheinlichkeitsmaß auf I und somit einen Maßraum. Von diesem Maßraum betrachten wir den Produktraum*

$$(\Omega, A, P),$$

wobei $\Omega := I^{\mathbb{Z}}$ sei. Ein Element von Ω hat also die Form

$$\omega = (\ldots, \omega_{-1}, \omega_0, \omega_1, \ldots)$$

mit $\omega_j \in I$ für $j \in \mathbb{Z}$. Die σ-Algebra A wird von den Zylindern bzw. Mengen der Form

$$\{\omega : (\omega_n, \ldots, \omega_{n+k-1}) \in E \subseteq I^k\}$$

erzeugt ($n \in \mathbb{Z}, k \in \mathbb{N}, k > 0$). Schließlich ist P festgelegt durch:

$$P\{\omega : (\omega_n, \ldots, \omega_{n+k-1}) \in E \subseteq I^k\} = \prod_{l=n}^{n+k-1} p_{\omega_l}.$$

Sei $T : \Omega \to \Omega$ definiert durch:

$$\omega_n = (T\omega)_{n+1}.$$

Sei nun Z eine Zylinder, also $n \in \mathbb{Z}, k \in \mathbb{N}, k > 0$ und

$$Z = \{\omega : (\omega_n, \ldots, \omega_{n+k-1}) \in E \subseteq I^k\}.$$

Dann ist

$$TZ = \{\omega : (\omega_{n+1}, \ldots, \omega_{n+k}) \in E \subseteq I^k\}$$

auch ein Zylinder also auch in A. Dasselbe gilt für $T^{-1}Z$ und da T bijektiv ist, ist T somit ein Automorphismus.

Weiters gilt für $\omega \in Z, \omega' \in TZ$ und $n \leq l < n + k$:

$$\omega_l = \omega'_{l+1}$$

und damit folgt:

$$P(Z) = \prod_{l=n}^{n+k-1} p_{\omega_l} = \prod_{l=n}^{n+k-1} p_{\omega'_{l+1}} = \prod_{l=n+1}^{n+k} p_{\omega'_l} = P(TZ).$$

Mit der gleichen Überlegung folgt $P(Z) = P(T^{-1}Z)$ und damit ist das Wahrscheinlichkeitsmaß P invariant bezüglich T.

5.4.5 Bemerkung. *Es ist möglich jedem Automorphismus eines Maßraumes (X, A, μ) eine Zahl $h(T)$ zuzuordnen. Die Zahl $h(T)$ wird Entropie des Automorphismus T genannt und hat die folgenden Eigenschaften: Die Zahl $h(T)$ kann für verschiedene T zwischen 0 und $+\infty$ liegen (inklusive 0 und $+\infty$) und für zwei metrisch isomorphe Automorphismen T_1 und T_2 gilt: $h(T_1) = h(T_2)$. Damit ist die Entropie eine metrische Invarianz. Nun aber zur genauen Definition.*

5.4.6 Definition. *Sei $\xi = (C_1, \ldots, C_r)$, mit $C_1, \ldots, C_r \subseteq X$ messbar. Gilt:*

$$\bigcup_{i=1}^{r} C_r = X, C_i \cap C_j = \emptyset \quad \textit{für} \quad i \neq j, 1 \leq i, j \leq r,$$

dann heißt ξ eine Partition von X.

Für die Partition $\xi = (C_1, \ldots, C_r)$ sei für $k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$ $T^k\xi$ die Partition in die Mengen $T^k C_1, \ldots, T^k C_r$.

Für jede Folge von Partitionen $\xi^{(j)}, j = 1, \ldots, N, \xi^{(j)} = (C_1^{(j)}, \ldots, C_r^{(j)})$ sei

$$\xi^{(1)} \vee \xi^{(2)} \vee \ldots \vee \xi^{(N)}$$

jene Partition, deren Elemente alle möglichen Mengen der Form

$$C_{i_1}^{(1)} \cap C_{i_2}^{(2)} \cap \ldots C_{i_N}^{(N)}, 1 \leq i_1, \ldots, i_N \leq r$$

sind.

Seien $k, l \in \mathbb{N}, k \leq l$ und ξ eine endliche Partition von X. Es sei ξ_k^l folgende Partition:

$$\xi_k^l = T^k\xi \vee T^{k+1}\xi \vee \ldots \vee T^l\xi.$$

5.4.7 Definition. *Die Entropie der Partition ξ ist die Zahl*

$$H(\xi) := -\sum_{i=1}^{r} \mu(C_i) \log(\mu(C_i)).$$

Ist dabei $\mu(C_i) = 0$, dann sei $\mu(C_i) \log(\mu(C_i)) = 0$.

Weiters zeigt man leicht, dass die Zahl

$$h(T, \xi) := \lim_{n \to \infty} \frac{1}{n} H(\xi_0^{n-1})$$

existiert (siehe etwa [10], S. 249). Damit ist schließlich die Entropie eines Automorphismus T die Zahl

$$h(T) := \sup h(T, \xi),$$

wobei das Supremum über alle endlichen Partitionen von X genommen wird.

5.4.8 Satz. *(Satz von Shannon-McMillan-Breiman) Sei T ein ergodischer Automorphismus des Lebesgue Raumes (X, A, λ), ξ eine beliebige, endliche Partition von X. Dann gilt für fast alle $x \in X$:*

$$\lim_{n \to \infty} \left(-\frac{1}{n} \lambda(C^{(n)}(x))\right) = h(T, \xi),$$

wobei $C^{(n)}(x)$ jenes Element der Partition $\xi \vee T\xi \vee \ldots T^{n-1}\xi$ ist, das x enthält.

Beweis. Siehe etwa [10]. ☺

5.5 Sonstiges

5.5.1 Satz. *Sei P ein Polynom vom Grad r mit reellen Koeffizienten und den Nullstellen $x_1, \ldots, x_r \in \mathbb{C}$. Dann ist*

$$P(x) = (x - x_1) \cdots (x - x_r) = x^r - p_1 x^{r-1} + p_2 x^{x-2} - \ldots + (-1)^r p_r$$

mit

$$p_1 = \sum_{i=1}^{r} x_i, p_2 = \sum_{i<j} x_i x_j, p_3 = \sum_{i<j<k} x_i x_j x_k, \ldots, p_r = x_1 x_2 \cdots x_r$$

und es gilt:

Jedes symmetrische Polynom in $x_1, \ldots, x_r$ ist darstellbar als Polynom in $p_1, \ldots, p_r$. Dabei ist ein Polynom $Q(x_1, \ldots, x_r)$ symmetrisch, wenn für jede Permutation

$$\pi : \{1, \ldots, r\} \to \{1, \ldots, r\}$$

gilt:

$$Q(x_1, \ldots, x_r) = Q(x_{\pi(1)}, \ldots, x_{\pi(r)}).$$

Beweis. Siehe etwa [26]. ☺

5.5.2 Satz. *Sei $n \in \mathbb{N}$ und $x_0, x_1, \ldots, x_n \in]0,1]$. Dann gilt:*

$$\exp(-x_0 - x_1 - \ldots - x_n) \geq (1 - x_0)(1 - x_1) \cdots (1 - x_n).$$

Beweis. Mit vollständiger Induktion über n:

$$n = 0: \quad \exp(-x_0) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-x_0)^k}{k!} = 1 - \frac{x_0}{2} + \underbrace{\frac{x_0^2}{6} - \frac{x_0^3}{24}}_{\geq 0} + \ldots \geq 1 - \frac{x_0}{2} \geq 1 - x_0.$$

$$n \to n+1: \quad \exp(-x_0 - \ldots - x_{n+1}) = \exp(-x_0 - \ldots - x_n) \cdot \exp(-x_{n+1}) \geq$$
$$\geq (1 - x_0) \cdots (1 - x_n) \cdot (1 - x_{n+1}).$$

☺

5.5.3 Satz. *Seien $n, p \in \mathbb{N}, p \leq \frac{n}{2}$. Dann gilt:*

$$\sum_{k=0}^{p} \binom{n}{k} = \frac{1}{p!} (\frac{\partial}{\partial z})^p \frac{(1+z)^n}{1-z} |_{z=0} .$$

Ist weiters $r \in \mathbb{R}, 0 < r < 1$, dann ist

$$\sum_{k=0}^{p} \binom{n}{k} \leq r^{-p} \cdot \frac{(1+r)^n}{1-r}.$$

Beweis. Wir verwenden zuerst die Identität $\binom{n}{k} + \binom{n}{k+1} = \binom{n+1}{k+1}$:

$$\sum_{k=0}^{p} \binom{n}{k} = \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{p} (\binom{n}{k} + \binom{n}{k}) = \frac{1}{2} \binom{n}{0} + \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{p-1} (\binom{n}{k} + \binom{n}{k+1}) + \frac{1}{2} \binom{n}{p} =$$
$$= \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{p} \binom{n+1}{k} + \frac{1}{2} \binom{n}{p} = \ldots = \frac{1}{2^j} \sum_{k=0}^{p} \binom{n+j}{k} + \sum_{k=1}^{j} \frac{1}{2^k} \binom{n+k-1}{p}.$$

Da $p \leq \frac{n}{2}$ ist gilt für $k \leq p$:

$$\binom{n+j}{k} \leq \binom{n+j}{p} = \frac{(n+j)!}{p!(n+j-p)!} < (n+j)^p$$

Damit folgt für $j > n > p$:

$$\frac{1}{2^j}\sum_{k=0}^{p}\binom{n+j}{k} < \frac{(p+1)(n+j)^p}{2^j} < \frac{j(2j)^p}{2^j} = \frac{j^{p+1}}{2^{j-p}}.$$

Jetzt lassen wir $j \to \infty$ gehen:

$$0 \leq \lim_{j\to\infty}\frac{1}{2^j}\sum_{k=0}^{p}\binom{n+j}{k} \leq \lim_{j\to\infty}\frac{j^{p+1}}{2^{j-p}} = 0.$$

Es gilt also:

$$\sum_{k=0}^{p}\binom{n}{k} = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{2^{k+1}}\binom{n+k}{p}.$$

Diese unendliche Reihe lässt sich jedoch berechnen. Dazu setzen wir für $z \in \mathbb{C}$:

$$u(z) := \sum_{p=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{2^{k+1}}\binom{n+k}{p}z^p.$$

Beachte:

$$\sum_{p=0}^{p}\binom{n}{k} = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{2^{k+1}}\binom{n+k}{p} = \frac{1}{p!}(\frac{\partial}{\partial z})^p u(z)\,|_{z=0}\,.$$

Für $x \in \mathbb{R}, x \geq 0$ dürfen wir umordnen und es gilt mit dem binomischen Lehrsatz:

$$u(x) = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{2^{k+1}}\sum_{p=0}^{\infty}\binom{n+k}{p}x^p = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{2^{k+1}}(1+x)^{n+k} = \frac{(1+x)^n}{2}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(1+x)^k}{2^k}.$$

Für $|\frac{1+z}{2}| < 1$ ist die letzte Reihe konvergent und daher gilt für solche $z \in \mathbb{C}$:

$$u(z) = \frac{(1+z)^n}{2}\sum_{k=0}^{\infty}(\frac{(1+z)}{2})^k = \frac{(1+z)^n}{2}\cdot\frac{1}{1-\frac{1+z}{2}} = \frac{(1+z)^n}{1-z}.$$

Damit haben wir gezeigt, dass

$$\sum_{k=0}^{p}\binom{n}{k} = \frac{1}{p!}(\frac{\partial}{\partial z})^p\frac{(1+z)^n}{1-z}\,|_{z=0}$$

ist.

Nun verwenden wir die Cauchy'sche Ungleichung (siehe 5.3.1): Dazu setzen wir für $0 < r < 1$:

$$m(r) := \max\{|\frac{(1+re^{it})^n}{1-re^{it}}|\ :\ t \in \mathbb{R}\}.$$

Damit gilt:

$$\frac{1}{p!}(\frac{\partial}{\partial z})^p\frac{(1+z)^n}{1-z}\,|_{z=0} \leq p!\cdot\frac{1}{p!}\cdot\frac{m(r)}{r^p} = \frac{m(r)}{r^p}.$$

Es ist eine einfache Extremwertaufgabe $m(r)$ zu berechnen. Die Maxima von $|\frac{(1+re^{it})^n}{1-re^{it}}|$ werden für $t = 2l\pi, l \in \mathbb{Z}$ angenommen und es gilt:

$$m(r) = \frac{(1+r)^p}{1-r}.$$

Es folgt die zweite Behauptung des Satzes:

$$\sum_{k=0}^{p} \binom{n}{k} \leq r^{-p} \cdot \frac{(1+r)^n}{1-r}.$$

☺

5.5.4 Satz. *(Satz von Tschebyscheff) Es gibt positive Konstanten $A, B \in \mathbb{R}$, so dass für alle $x \in \mathbb{R}, x \geq 2$ gilt:*

$$A\frac{x}{\log(x)} < \pi(x) < B\frac{x}{\log(x)},$$

wobei $\pi(x)$ die Anzahl der Primzahlen kleiner oder gleich x ist.

Beweis. Siehe etwa [28]. ☺

5.5.5 Satz. *(Satz von Arzela-Ascoli) Sei F eine Familie reellwertiger stetiger Funktionen auf der kompakten Menge $X \subseteq \mathbb{R}$. Jede Folge aus F enthält genau dann eine gleichmäßig konvergente Teilfolge, wenn F punktweise beschränkt und gleichstetig ist. In diesem Fall ist F sogar gleichmäßig beschränkt.*

Beweis. Siehe etwa [24]. ☺

Literatur

[1] BARON K.: **On a problem of R. Schilling**, Ber. Math.-Statist. Sekt. Forschungsgesellschaft Joanneum 286, 1 - 6, 1988.

[2] BARON K. UND VOLKMANN P.: **Unicité pour une équation fonctionelle**, Ann. École Norm. Sup. Cracovie, 159, Travaux Math. 13, 53 - 56, 1993.

[3] BARON K., SIMON A. UND VOLKMANN P.: **Solutions d'une equation fonctionelle dans l'espace des distributions temperees**, C.R. Acad. Sci. Paris, 319 Série I, 1249 - 1252, 1994.

[4] BERTIN M.J., DECOMPS-GUILLOUX A. GRANDET-HUGOT M., PATHIAUX - DELEFOSSE M., SCHREIBER J.P.: **Pisot and Salem Numbers**, Birkhäuser Verlag, 1992.

[5] BILLINGSLEY P.: **Hausdorff dimension in probability theory**, Illinois J. of Math. 4, 187 - 209, MR 24:A1750, 1960.

[6] BILLINGSLEY P.: **Ergodic Theory and Information**, John Wiley & Sons, New York, 1965.

[7] BORWEIN J.M., GIRGENSOHN R.: **Functional equations and distribution functions**, Results in Math. 26, 229 - 237, 1994.

[8] CIEPLIŃSKI K.: **On bounded solutions of a generalized Schilling's problem**, Rocznik Nauk.-Dydakt. Prace Mat. No. 14, 19 - 26, 1997.

[9] CIEPLIŃSKI K. UND GRZĄŚLEWICZ A.: **On a problem related to the generalized Schilling equation**, Aequ. Math. 56, No. 1 - 2, 1 - 10, 1998.

[10] CORNFELD I.P., FOMIN S.V., SINAI YA.G.: **Ergodic Theory**, Grundlehren der mathematischen Wissenschaften 245, Springer Verlag, New York, Heidelberg, Berlin, 1982.

[11] DAUBECHIES I. UND LAGARIAS J.: **Two-scale difference equations, I. Existence and global regularity of solutions**, SIAM J. Math. Anal. 22 (5), 1388 - 410, 1991.

[12] DERFEL G.: **Probabilistic method for a class of functional- differential equations**, Ukrainian Math. J. 41 (10), 1137 - 1141, 1989.

[13] DERFEL G., DYN N. UND LEVIN D.: **Generalized refinement equations and subdivision processes**, J. Approx. Theory 80 (2), 272 - 297, 1995.

[14] DERFEL G. UND SCHILLING R.: **Spatially chaotic configurations and functional equations with rescaling**, J. Phys. A 29 (15), 4537 - 4547, 1996.

[15] ERDÖS P.: **On a family of symmetric Bernoulli convolutions**, American Journal of Mathematics, 61, 974 - 976, 1939.

[16] ERDÖS P.: **On the smoothness properties of a family of Bernoulli convolutions**, American Journal of Mathematics, 62, 180 -186, 1940.

[17] FÖRG-ROB W.: **On a problem of R. Schilling I.**, Math. Pannonica 5, 29 - 65, 1994.

[18] Förg-Rob W.: **On a problem of R. Schilling II.**, Math. Pannonica 5, 145 - 168, 1994.

[19] Garsia A.M.: **Arithmetic properties of Bernoulli convolutions**, Transactions of the American Mathematical Society, 102, 409 - 432,1962.

[20] Girgensohn R., Morawiec J.: **Positivity of Schilling Functions**, Bull. Polish Acad. Sci. Math. 48, no.4, 407 - 412, 2000.

[21] Grząślewicz A.: **The general solution of the generalized Schilling's equation**, Aequ. Math. 44, 317 - 326, 1992.

[22] Hardy G., Littlewood J.: **Some properties of fractional integrals**, Math. Z. 27, 565 - 606, 1928.

[23] Hewitt E., Stromberg K.: **Real and Abstract Analysis**, Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 1965.

[24] Heuser H.: **Lehrbuch der Analysis, Teil 1**, B.G. Teubner Stuttgart, 1982.

[25] Jessen B., Wintner A.: **Distribution functions and the Riemann zeta function**, Trans. Amer. Soc. 38, 48 - 88, 1935.

[26] Jacobson N.: **Basic Algebra I**, W.H. Freeman and Company, New York 1985.

[27] Kahane J.P., Salmen R.: **Sur la convolution d'une infinité de distributions de Bernoulli**, Colloquium Mathematicum, Vol. VI, 1958.

[28] Krätzel E.: **Zahlentheorie**, VEB Deutscher Verlag der Wissenschaft, Berlin 1981.

[29] Lorenz F.: **Funktionentheorie**, Heidelberg; Berlin: Spektrum, Akad. Verl., 1997.

[30] Mattila P.: **Geometry of Sets and Measure in Euclidean Spaces**, Cambridge studies in advanced mathematics 44, Cambridge University Press, 1995.

[31] Morawiec J.: **On a problem of R. Schilling**, in Proc. 3rd International Conference on Functional Equations and inequalities held at Koninki, 1991, Wyższa Szkoła Pedagogiczna, Inst. Math., Cracovie, 22, 1993; bzw. Aequ. Math. 47, 284 - 285, 1994.

[32] Morawiec J.: **On bounded solutions of a problem of R. Schilling**, Ann. Math. Sil. No.8, 97 - 101, 1994.

[33] Morawiec J.: **On continuous solutions of a problem of R. Schilling**, Results in Mathematics 27, 381 - 386, 1995.

[34] Morawiec J.: **Bounded solutions of Schilling's problem**, Math. Pannonica 7, No. 2, 223 - 232, 1996.

[35] Peano G.: **Sur une courbe, qui remplit toute une aire plane**, Mathematische Annalen, 36, 157 - 160, 1890.

[36] Peres Y., Schlag W., Solomyak B.: **Sixty Years of Bernoulli Convolutions**, Fractal geometry and stochastics, II (Greifwald/Koserow,1998), 39 - 65, Progr. Probab., 46, Birkhäuser, Basel, 2000.

[37] Peres Y., Solomyak B.: **Absolute continuity of Bernoulli convolutions, a simple proof**, Math. Research Letters 3, no. 2, 231 - 239, 1996.

[38] Peres Y., Solomyak B.: **Self-similar measures and intersections of Cantor sets**, Transactions of the American Mathematical Society, Volume 350, Number 10, 4065 - 4087, 1998.

[39] Petersen K.: **Ergodic theory**, Cambridge studies in advanced mathematics, Cambridge University Press, 1983.

[40] Pisot C.: **La répartition modulo 1 et les nombres algébriques**, Annali Schola Norm. Sup. Pisa, 2, 205 - 248, 1938.

[41] Reichert P. und Schilling R.: **Glasslike properties of a chain of particles with anharmonic and competing interactions**, Phys. Review B 32 (9), 5731 - 5746.

[42] Remmert R.: **Funktionentheorie 1** (4. Auflage), **Funktionentheorie 2** (2. Auflage), Springer - Lehrbuch, 1995.

[43] Salem R.: **Sets of uniqueness and sets of multiplicity**, Transactions of the American Mathematical Society, 54, 218 - 228, 1943.

[44] Schilling R.: **Spatially chaotic structures in nonlinear dynamics of solid**, ed. E. Thomas, Berlin Springer, 213 - 241, 1992.

[45] Solomyak B.: **On the random series $\sum \pm\lambda^i$ (an Erdös problem)**, Annals of Math. 142, 611 - 625, 1995.

[46] Stein E.M., Weis G.: **Introduction to Fourieranalysis on Euclidean Spaces**, Princeton University Press 1971.

[47] Vijayaraghavan T.: **On the fractional parts of the powers of a number (I)**, Journal of the London Mathematical Society, 15, 159 - 160, 1940.

[48] Vijayaraghavan T.: **On the fractional parts of the powers of a number (II)**, Proceedings of the Camebridge Philosophical Society, 37, 349 - 357, 1941.

[49] Walker P.L.: **The Theory of Fourier Series and Integrals**, John Wiley & sons, 1986.

Lebenslauf

Name: Dominik Zeillinger

Geburtsdatum: 21.I.1977

Geburtsort: Schwaz

Staatsbürgerschaft: Österreich

Wohnort: A - 6134 Vomp, Gröben 31

Eltern:

Mag. Petronilla Zeillinger (geborene Steinlechner, 21.II.1947)

Mag. Dr. Gunther F. Zeillinger (1.II.1940)

Schulbildung:

1983 - 1987 Volksschule Vomp

1987 - 1995 Bischöfliches Gymnasium Paulinum Schwaz

1995 - Mathematik-Studium an der Leopold-Franzens-Universität Innsbruck